Determinanty

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Pak **determinant matice** A je prvek z R označovaný symbolem $|A|$ a definovaný předpisem

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}.$$

Připomeňme, že S_n značí množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Sčítá se tedy přes všechny permutace σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Přitom $\wp(\sigma)$ je parita permutace $\sigma \in S_n$, tedy hodnota 1 nebo -1, kterou můžeme chápat jako prvek z R. Jednotlivý součin $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ pro vybranou permutaci $\sigma \in S_n$ se nazývá **člen determinantu** $|A|$. Poněvadž σ je bijekce množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ na ni samotnou, lze ji chápat jako bijekci množiny všech řádkových indexů na množinu všech sloupcových indexů. Takže součin $a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ je pak vytvořen z n prvků matice A vybraných tak, že z každého řádku a z každého sloupce matice je vybrán právě jeden prvek. Navíc je tento součin je opatřen znaménkem ve shodě s paritou $\wp(\sigma)$ permutace σ, která je vlastně permutací utvořenou z řádkových a sloupcových indexů vybraných n prvků.

Pro počáteční hodnoty $n = 1, 2, 3$ dává předchozí definice následující vztahy pro výpočet příslušných determinantů:

Pro $n = 1$ máme $A = (a_{11})$ a $|A| = a_{11}$.

Pro $n = 2$ máme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a $|A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Pro $n = 3$ máme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ a

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Poslední vztah pro $n = 3$ bývá uváděn jako Sarrusovo pravidlo. Podobná pravidla plynoucí přímo z definice determinantu by bylo možno psát i pro hodnoty $n > 3$. Počty členů v těchto pravidlech však velmi rychle rostou — pro dané n je těchto členů celkem $n!$.

Tvrzení. Pro libovolnou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$ platí

$$|A^\top| = |A|\,,$$

tedy transponováním matice A se hodnota determinantu této matice nemění.

Důkaz. Ukážeme, že ve vyjádření obou determinantů podle definice se objevují tytéž členy. Buď $\sigma \in S_n$ libovolná permutace. Jí odpovídá člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$. Vezměme nyní inverzní permutaci σ^{-1} a uvažme k ní součin $\wp(\sigma^{-1}) \cdot a_{\sigma^{-1}(1)\,1} \cdot a_{\sigma^{-1}(2)\,2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma^{-1}(n)\,n}$. Podle definice transponované matice $A^\top$ je ovšem tento součin členem determinantu $|A^\top|$. Z kapitoly o permutacích ale víme, že $\wp(\sigma^{-1}) = \wp(\sigma)$. Vzhledem ke komutativitě násobení v okruhu $(R, +, \cdot)$ odtud plyne, že oba uvedené součiny jsou stejné. Jsou tedy oba zmíněné determinanty součty stejných členů, takže jsou si rovny.

Tvrzení. Pozůstává-li některý řádek dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n z nulových prvků okruhu $(R, +, \cdot)$, pak $|A| = 0$.

Důkaz. Potom totiž každý člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$ obsahuje nulový činitel, totiž prvek $a_{i\,\sigma(i)}$, kde i je index dotyčného nulového řádku matice A.

Poznámka. Analogické tvrzení platí rovněž pro sloupce matice A. Plyne to bezprostředně z předchozího tvrzení o determinantech transponovaných matic. Podobně tomu bude i v dalších tvrzeních tohoto typu.

Tvrzení. Jsou-li některé dva řádky dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n stejné, pak $|A| = 0$.

Důkaz. Nechť řádky matice A s indexy k, ℓ, kde $k \neq \ell$, jsou stejné, takže $a_{kj} = a_{\ell j}$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$. Uvažme libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ a k ní permutaci $\tau = \sigma \circ \big(k \quad \ell\big)$. Pak $\tau(k) = \sigma(\ell)$ a $\tau(\ell) = \sigma(k)$, takže $a_{k\,\tau(k)} = a_{\ell\,\sigma(\ell)}$ a $a_{\ell\,\tau(\ell)} = a_{k\,\sigma(k)}$. Kromě toho pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{k, \ell\}$ je $\tau(i) = \sigma(i)$, a tedy $a_{i\,\tau(i)} = a_{i\,\sigma(i)}$. Navíc $\wp(\tau) = -\wp(\sigma)$. To znamená, že členy $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ a $\wp(\tau) \cdot a_{1\,\tau(1)} \cdot a_{2\,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\tau(n)}$ determinantu $|A|$ se liší pouze znaménkem, čili jsou to navzájem opačné prvky okruhu $(R, +, \cdot)$. Podotkneme-li k tomu ještě, že zase naopak $\sigma = \tau \circ \big(k \quad \ell\big)$, vidíme, že členy determinantu $|A|$ se rozpadnou do dvojic, které se navzájem odečtou, takže $|A| = 0$.

Tvrzení. Vznikne-li matice $B = (b_{ij})$ přehozením dvou řádků dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n, pak $|B| = -|A|$.

Důkaz. Nechť matice B vznikla přehozením k-tého a ℓ-tého řádku matice A, kde $k \neq \ell$, takže $b_{kj} = a_{\ell j}$ a $b_{\ell j} = a_{kj}$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom pro libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ a pro jí odpovídající člen determinantu $|B|$ vychází

$$\begin{aligned}\wp(\sigma) \cdot b_{1\,\sigma(1)} \cdot b_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\,\sigma(n)} &= \wp(\sigma) \cdot a_{1\,\tau(1)} \cdot a_{2\,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\tau(n)} \\ &= -\wp(\tau) \cdot a_{1\,\tau(1)} \cdot a_{2\,\tau(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\tau(n)},\end{aligned}$$

kde $\tau = \sigma \circ \big(k \;\; \ell\big)$, a tedy $\wp(\sigma) = -\wp(\tau)$. Poněvadž zobrazení přiřazující každé permutaci $\sigma \in S_n$ permutaci $\sigma \circ \big(k \;\; \ell\big)$ je bijekcí množiny S_n na ni samotnou, z definice determinantu pak plyne, že $|B| = -|A|$.

Tvrzení. Vznikne-li matice $B = (b_{ij})$ vynásobením všech prvků některého řádku dané čtvercové matice $A = (a_{ij})$ řádu n zvoleným prvkem c okruhu $(R, +, \cdot)$, pak $|B| = c \cdot |A|$.

Důkaz. Pak totiž pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ máme

$$\wp(\sigma) \cdot b_{1\,\sigma(1)} \cdot b_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\,\sigma(n)} \;=\; c \cdot \wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)},$$

takže přímo z definice determinantu dostáváme, že $|B| = c \cdot |A|$.

Tvrzení. Nechť $B = (b_{ij})$ a $C = (c_{ij})$ jsou dvě čtvercové matice řádu n, které se od sebe liší pouze prvky jednoho jediného řádku, řekněme řádku s indexem k, a nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, která se od matic B, C liší pouze v tom, že prvky jejího k-tého řádku mají tvar $a_{k1} = b_{k1} + c_{k1}$, $a_{k2} = b_{k2} + c_{k2}$, $\ldots$, $a_{kn} = b_{kn} + c_{kn}$. Pak $|A| = |B| + |C|$. Podrobněji vyjádřeno, platí rovnost

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ b_{k1}+c_{k1} & b_{k2}+c_{k2} & \ldots & b_{kn}+c_{kn} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kn} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k-1\,1} & a_{k-1\,2} & \ldots & a_{k-1\,n} \\ c_{k1} & c_{k2} & \ldots & c_{kn} \\ a_{k+1\,1} & a_{k+1\,2} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Důkaz. V dané situaci ovšem pro každou permutaci $\sigma \in S_n$ a jí příslušný člen determinantu $|A|$ vychází

$$\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} = \\ \wp(\sigma) \cdot b_{1\,\sigma(1)} \cdot b_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{n\,\sigma(n)} + \wp(\sigma) \cdot c_{1\,\sigma(1)} \cdot c_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot c_{n\,\sigma(n)},$$

poněvadž $a_{k\,\sigma(k)} = b_{k\,\sigma(k)} + c_{k\,\sigma(k)}$ a $a_{i\,\sigma(i)} = b_{i\,\sigma(i)} = c_{i\,\sigma(i)}$ pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq k$. Tvrzení tedy opět plyne přímo z definice determinantu.

Tvrzení. Buď dána čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n. Vznikne-li matice $B = (b_{ij})$ tím způsobem, že pro zvolený prvek c okruhu $(R, +, \cdot)$ se k některému řádku matice A přičte jiný řádek matice A, jehož všechny prvky jsou předtím vynásobeny prvkem c, pak platí $|A| = |B|$.

Důkaz. Nechť matice B vznikla z matice A tak, že se ke k-tému řádku matice A přičetl ℓ-tý řádek matice A vynásobený prvkem c. Podrobněji rozvedeno, máme ukázat, že pak platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} + c{\cdot}a_{\ell 1} & a_{k2} + c{\cdot}a_{\ell 2} & \dots & a_{kn} + c{\cdot}a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & a_{\ell 2} & \dots & a_{\ell n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Označme jako D matici, která vznikne z matice A tak, že místo k-tého řádku matice A se zde zopakuje její ℓ-tý řádek. Pak matice D má dva stejné řádky, a tudíž $|D| = 0$. Podle předchozích dvou tvrzení ovšem máme $|B| = |A| + c \cdot |D|$, takže vychází $|B| = |A|$.

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Řekneme, že A je **horní trojúhelníková matice**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ splňující $i > j$, tedy jestliže všechny prvky matice A ležící pod hlavní diagonálou jsou rovny nulovému prvku okruhu $(R, +, \cdot)$. Podobně řekneme, že A je **dolní trojúhelníková matice**, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechna $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ splňující $i < j$. Tehdy jsou nulové všechny prvky matice A ležící nad hlavní diagonálou.

Tvrzení. Buď dána čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n. Je-li A horní trojúhelníková matice anebo dolní trojúhelníková matice, pak $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$.

Důkaz. Uvedený součin je jedním z členů determinantu $|A|$, a sice je to člen odpovídající permutaci $id_{\{1,2,\ldots,n\}}$. Pro každou jinou permutaci $\sigma \in S_n$ ovšem platí, že existuje $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro něž $k > \sigma(k)$, a existuje $\ell \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro něž $\ell < \sigma(\ell)$. To plyne z faktu, že $1 + 2 + \cdots + n = \sigma(1) + \sigma(2) + \cdots + \sigma(n)$, a z toho, že $\sigma \neq id_{\{1,2,\ldots,n\}}$. Je-li ovšem matice A v jednom z uvedených dvou trojúhelníkových tvarů, znamená to, že člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$ odpovídající kterékoliv neidentické permutaci $\sigma \in S_n$ je roven nule. Takže platí uvedené tvrzení.

Toto poslední tvrzení spolu s předchozími poznatky dává metodu, jak v některých případech usnadnit výpočet determinantů vyšších řádů. Týká se to zejména situací, kdy je dána čtvercová matice A řádu n nad nějakým tělesem $(R, +, \cdot)$. Tehdy je možno takovou matici vždy převést například na horní trojúhelníkovou matici opakovanou aplikací řádkových úprav popsaných v předposledním ze shora uvedených tvrzení (tyto úpravy nemění hodnotu determinantu) v kombinaci s přehazováním řádků a sloupců matice (tím se může měnit znaménko determinantu).