Hodnost matice

Nechť
$$A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$$
je matice typu m/n nad tělesem $(T,+,\cdot)$. Pak řádky matice A můžeme chápat jako uspořádané n-tice prvků z T, a tedy jako prvky vektorového prostoru $(T^n,+,\cdot)$. Řádky matice A potom generují jistý podprostor ve vektorovém prostoru $(T^n,+,\cdot)$. Dimenze tohoto podprostoru generovaného řádky matice A se nazývá **řádková hodnost** matice A. Podobně sloupce matice A lze chápat jako uspořádané m-tice prvků z T, a tedy jako prvky vektorového prostoru $(T^m,+,\cdot)$. Dimenze podprostoru vektorového prostoru $(T^m,+,\cdot)$ generovaného sloupci matice A se pak nazývá **sloupcová hodnost** matice A. V dalším textu této kapitoly ale ukážeme, že obě tyto dimenze jsou si rovny, čímž obdržíme pojem hodnosti matice A.

Buď znovu $A = (a_{ij})$ matice typu m/n nad tělesem $(T,+,\cdot)$. Pak každá z následujících modifikací matice A se nazývá **elementární řádková úprava** matice A:

(i) vynásobení i-tého řádku matice A prvkem r pro některá $i \in \{1,\ldots,m\}$ a $r \in T$, $r \neq 0$,

(ii) přičtení k i-tému řádku matice A j-tého řádku matice A vynásobeného prvkem r pro některá $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $i \neq j$, a $r \in T$.

K elementárním řádkovým úpravám matice A bývá někdy též počítána výměna i-tého a j-tého řádku matice A pro některá $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $i \neq j$. Tuto úpravu lze ale získat složením několika úprav typu (i) a (ii): nejprve se j-tý řádek přičte k i-tému, pak se i-tý řádek odečte od j-tého, potom se znovu j-tý řádek přičte k i-tému a nakonec se j-tý řádek vynásobí prvkem -1.

Zaměníme-li všude v předchozím odstavci slovo “řádek” slovem “sloupec” a číslo m číslem n, dostaneme podobně definici toho, co jsou **elementární sloupcové úpravy** matice A.

Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou dvě matice téhož typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ takové, že matice B vznikla z matice A konečnou posloupností elementárních řádkových úprav. Pak píšeme $A \sim B$ a říkáme, že matice A a B jsou **řádkově ekvivalentní**. Poněvadž ke každé elementární řádkové úpravě existuje elementární úprava, který je k ní inverzní v tom smyslu, že převede upravenou matici zpět do původního tvaru, je relace $\sim$ symetrická a celkem je to ekvivalence na množině všech matic typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Analogickou úvahu je možno vést i pro elementární sloupcové úpravy matic.

Tvrzení. Elementárními řádkovými úpravami dané matice $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ se nemění podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ generovaný řádky matice A. Nemění se tak ani řádková hodnost matice A.

Důkaz. Podle posledního tvrzení z kapitoly o vektorových prostorech je podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ generovaný řádky matice A roven množině všech lineárních kombinací těchto řádků. Je ale evidentní, že množina všech lineárních kombinací řádků matice A se nezmění provedením kterékoliv elementární řádkové úpravy matice A.

Tvrzení. Elementárními řádkovými úpravami dané matice $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ se nemění sloupcová hodnost matice A.

Poznámka. Může se ale změnit podprostor vektorového prostoru $(T^m, +, \cdot)$ generovaný sloupci matice A.

Důkaz. Všimneme si nejprve, že elementární řádkové úpravy matice A nemají vliv na lineární závislost či nezávislost vybraných posloupností sloupců matice A. Označme $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ jednotlivé sloupce matice A. Proveďme kteroukoliv zvolenou elementární řádkovou úpravu s maticí A, čímž vznikne matice A', a označme $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n$ sloupce této nové matice A'. Vyberme libovolně indexy $j_1, j_2, \ldots, j_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$, a prvky $s_1, s_2, \ldots, s_k \in T$. Označme ještě $\mathbf{0}$ nulový sloupec o m složkách. Z definice elementárních řádkových úprav je evidentní, že pak platí $s_1 \cdot \mathbf{a}_{j_1} + s_2 \cdot \mathbf{a}_{j_2} + \cdots + s_1 \cdot \mathbf{a}_{j_k} = \mathbf{0}$ právě tehdy, když platí $s_1 \cdot \mathbf{a}'_{j_1} + s_2 \cdot \mathbf{a}'_{j_2} + \cdots + s_1 \cdot \mathbf{a}'_{j_k} = \mathbf{0}$. To ukazuje, že sloupce $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když sloupce $\mathbf{a}'_{j_1}, \mathbf{a}'_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}'_{j_k}$ jsou lineárně nezávislé. Sloupcová hodnost matice A je ale definována jako dimenze podprostoru v $(T^m, +, \cdot)$ generovaného sloupci matice A, a tedy jako počet vektorů báze tohoto podprostoru. Podle jednoho z tvrzení předchozí kapitoly lze takovou bázi $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_k}$ vybrat ze sloupců $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ matice A. Po provedenní elementárních řádkových úprav ovšem v nové matici A' zůstanou odpovídající sloupce $\mathbf{a}'_{j_1}, \mathbf{a}'_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}'_{j_k}$ lineárně nezávislé a generují tudíž v $(T^m, +, \cdot)$ podprostor stejné dimenze. Jiná lineárně nezávislá posloupnost mající více sloupců přitom mezi sloupci $\mathbf{a}'_1, \mathbf{a}'_2, \ldots, \mathbf{a}'_n$ matice A' vzniknout nemohla. Obě matice A i A' tedy mají stejnou sloupcovou hodnost.

Buď opět $A = (a_{ij})$ matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Řekneme, že matice A je ve **schodovitém tvaru**, jsou-li v ní shora dolů nejprve nenulové řádky, pokud matice takové řádky obsahuje, a až za nimi jsou nulové řádky, má-li matice takové, a jestliže každý nenulový řádek (vyjma prvního) začíná zleva několika nulami, přičemž každý další nenulový řádek má těchto nul vlevo více než řádek jemu předcházející. První nenulový prvek zleva v každém nenulovém řádku se nazývá **hlavní prvek** tohoto řádku. Je jasné, že nenulové řádky matice A ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé (žádný z nich není možno získat jako lineární kombinaci ostatních). Je tedy počet nenulových řádků matice A ve schodovitém tvaru roven řádkové hodnosti této matice. Řekneme dále, že matice A je v **Gauss-Jordanově tvaru**, je-li ve schodovitém tvaru, je-li přitom každý hlavní prvek roven 1, a je-li navíc každý hlavní prvek jediným nenulovým prvkem ve sloupci, ve kterém leží (tedy každý hlavní prvek má ve svém sloupci nejen pod sebou, ale i nad sebou samé nuly).

Tvrzení. Každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ lze převést konečnou posloupností elementárních řádkových úprav na matici ve schodovitém tvaru, případně až na matici v Gauss-Jordanově tvaru.

Důkaz. Při hledání schodovitého tvaru postupujeme indukcí vzhledem k počtu nenulových řádků matice A. Je-li A nulová matice, je již ve schodovitém tvaru. Je-li matice A nenulová, vybereme první nenulový sloupec zleva. Případným přehozením řádků docílíme toho, aby v tomto sloupci byl první prvek shora nenulový. Potom odečítáním vhodných násobků prvního řádku od následujících řádků dosáhneme toho, že v tomto prvním nenulovém sloupci budou pod prvním nenulovým prvkem shora již samé nuly. Byl-li zmíněný nenulový sloupec posledním sloupcem matice, je takto získaná matice již ve schodovitém tvaru. V opačném případě, odmyslíme-li si nyní z takto vzniklé matice její první řádek, dostaneme matici, která bude mít méně nenulových řádků (nulové řádky se uvedenými úpravami nezměnily). Podle indukčního předpokladu lze tedy tuto zmenšenou matici převést elementárními řádkovými úpravami na schodovitý tvar (nulové sloupce vlevo, kterých bude více než v celé matici, se přitom nezmění). Takže pak i původní matici A lze takto převést na schodovitý tvar.

Abychom od schodovitého tvaru přešli ke Gauss-Jordanovu tvaru, je-li daná matice nenulová, je třeba zprvu každý nenulový řádek vynásobit inverzním prvkem k hlavnímu prvku ležícímu v tomto řádku. Poté odečítáním vhodných násobků daného nenulového řádku od řádků ležících nad ním docílíme toho, že ve sloupci nad hlavním prvkem tohoto řádku budou samé nuly. To se provede pro každý nenulový řádek matice vyjma prvního.

Důsledek. Pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ platí, že její řádková hodnost je rovna její sloupcové hodnosti.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení lze matici A elementárními řádkovými úpravami převést na Gauss-Jordanův tvar. Nechť k je počet nenulových řádků v tomto tvaru. Potom je možné přehazováním sloupců přemístit sloupce obsahující hlavní prvky doleva, takže vlevo nahoře vznikne jednotková matice E_k. Je dále jasné, že pak je možno odčítáním vhodných násobků prvních k sloupců od zbývajících sloupců všechny tyto následující sloupce učinit nulovými sloupci. Takto použitím nejprve elementárních řádkových a poté i sloupcových úprav přejde matice A do tvaru, kdy na hlavní diagonále bude prvních k prvků rovných 1 a všechny ostatní prvky matice budou rovny 0. Matice tohoto tvaru má ovšem řádkovou i sloupcovou hodnost rovnu k. Poněvadž už víme, že elementární řádkové úpravy nemění řádkovou ani sloupcovou hodnost matice, a totéž ovšem platí i pro elementární sloupcové úpravy, je taktéž řádková i sloupcová hodnost výchozí matice A rovna k.

Nyní jsme tedy v situaci, kdy můžeme pro každou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ definovat **hodnost** matice A jako společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti matice A.