Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$ nad komutativním okruhem $(R, +, \cdot)$. Pro zvolené indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme A_{ij} čtvercovou matici řádu $n - 1$, která vznikne z matice A vynecháním jejího i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak prvek okruhu $(R, +, \cdot)$

$$\widehat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

se nazývá **algebraický doplněk** prvku a_{ij} v matici A.

Vztah uvedený v následující větě se nazývá **Laplaceův rozvoj** determinantu $|A|$ podle i-tého řádku matice A.

Věta. Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro libovolný řádkový index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí

$$|A| = a_{i1} \cdot \widehat{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widehat{A}_{i2} + \cdots + a_{in} \cdot \widehat{A}_{in}.$$

Poznámka. Analogický vztah platí také pro sloupcové indexy. To znamená, že je možno provést stejným způsobem Laplaceův rozvoj determinantu také podle některého sloupce. To opět plyne z tvrzení o determinantech transponovaných matic.

Důkaz. Pro libovolné indexy $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme $A_j^{(i)}$ matici řádu n, která vznikne z matice A tak, že v i-tém řádku matice A ponecháme pouze prvek a_{ij} a ostaní prvky tohoto řádku nahradíme nulami. Pak opakovanou aplikací jednoho z dřívějších tvrzení o determinantu matice, jejíž některý řádek lze zapsat jako součet nějakých dvou řádků, dostáváme

$$|A| = |A_1^{(i)}| + |A_2^{(i)}| + \cdots + |A_n^{(i)}|.$$

Zvolme nyní index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a zkoumejme determinant $|A_j^{(i)}|$. Přehoďme v matici $A_j^{(i)}$ i-tý řádek s $(i-1)$-ním řádkem, potom $(i-1)$-ní řádek s $(i-2)$-hým řádkem, atd., až nakonec druhý řádek s prvním řádkem. Tím se původně i-tý řádek matice $A_j^{(i)}$ ocitne na pozici prvního řádku a řádky, které mu původně předcházely, se objeví v nezměněném pořadí až za ním.

Proveďme dále podobnou operaci se sloupci takto vzniklé matice. Tedy přehoďme j-tý sloupec s $(j-1)$-ním sloupcem, potom $(j-1)$-ní sloupec s $(j-2)$-hým sloupcem, atd., až nakonec druhý sloupec s prvním sloupcem. Matici, která takto nakonec vznikne, označme symbolem $\bar{A}_j^{(i)}$. Při transformaci matice $A_j^{(i)}$ na matici $\bar{A}_j^{(i)}$ bylo provedeno celkem $i+j-2$ změn spočívajících v přehození dvou řádků nebo dvou sloupců, takže podle příslušného dříve uvedeného tvrzení pro determinanty těchto matic platí

$$|A_j^{(i)}| = (-1)^{i+j} \cdot |\bar{A}_j^{(i)}|.$$

Přitom v matici $\bar{A}_j^{(i)}$ se prvek a_{ij} objeví zcela vlevo nahoře a v prvním řádku napravo od něj budou samé nuly. Kromě toho po vynechání prvního řádku a prvního sloupce matice $\bar{A}_j^{(i)}$ zůstane právě matice A_{ij}. Aplikujme nyní definici determinantu na determinant $|\bar{A}_j^{(i)}|$. V této definici se ovšem uplatní pouze ty permutace $\sigma \in S_n$, pro něž $\sigma(1) = 1$, neboť jinak příslušný člen determinantu $|\bar{A}_j^{(i)}|$ obsahuje nulový činitel z prvního řádku matice $\bar{A}_j^{(i)}$ a je tudíž roven nule. Permutace $\sigma \in S_n$ s vlastností $\sigma(1) = 1$ lze ovšem chápat jako permutace množiny $\{2, \ldots, n\}$. Chápeme-li tato čísla jednou jako řádkové indexy a podruhé jako sloupcové indexy, jedná se o ty řádky a sloupce matice $\bar{A}_j^{(i)}$, v nichž je právě uložena matice A_{ij}. Navíc pro paritu $\wp(\sigma)$ takové permutace σ není podstatné, chápeme-li ji jako permutaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nebo $\{2, \ldots, n\}$. To ale ukazuje, že členy determinantu $|\bar{A}_j^{(i)}|$ odpovídající permutacím $\sigma \in S_n$ s vlastností $\sigma(1) = 1$ jsou právě součiny prvku a_{ij} s libovolnými členy determinantu $|A_{ij}|$. Takže dostáváme

$$|\bar{A}_j^{(i)}| = a_{ij} \cdot |A_{ij}|.$$

Dosazením z této rovnosti do předchozího vztahu a jeho následným použitím v úvodním vyjádření determinantu $|A|$ na počátku tohoto důkazu obdržíme dokazovanou rovnost.

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Řekneme, že tato matice A je v **polorozpadlém tvaru**, existuje-li index $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ takový, že buďto $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = k+1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, k$, anebo $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, k$ a $j = k+1, \ldots, n$. Zavedeme-li čtvercové matice $B = (a_{ij})_{i=1,\ldots,k,\, j=1,\ldots,k}$ a $C = (a_{ij})_{i=k+1,\ldots,n,\, j=k+1,\ldots,n}$ a dále matice $F = (a_{ij})_{i=1,\ldots,k,\, j=k+1,\ldots,n}$ a $G = (a_{ij})_{i=k+1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,k}$, pak takovou matici A lze schematicky psát v jednom ze tvarů

$$A = \begin{pmatrix} B & F \\ O & C \end{pmatrix} \qquad \text{nebo} \qquad A = \begin{pmatrix} B & O \\ G & C \end{pmatrix},$$

kde O představuje nulovou matici, pokaždé odpovídajícího typu.

Tvrzení. Je-li $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n v jednom z polorozpadlých tvarů tak, jak byly popsány výše, pak pro její determinant platí $|A| = |B| \cdot |C|$.

Důkaz. Předpokládejme například, že $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = k+1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, k$. Uvažme libovolnou permutaci $\sigma \in S_n$ a jí odpovídající člen $\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)}$ determinantu $|A|$. Je-li zde pro některé $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ splněno $\sigma(i) \in \{1, \ldots, k\}$, pak $a_{i\,\sigma(i)} = 0$, takže dotyčný člen determinantu $|A|$ je roven nule. Stačí tedy uvažovat pouze ty permutace $\sigma \in S_n$, které pro každé $i \in \{k+1, \ldots, n\}$ splňují $\sigma(i) \in \{k+1, \ldots, n\}$. Tyto permutace pak ale také pro každé $i \in \{1, \ldots, k\}$ splňují $\sigma(i) \in \{1, \ldots, k\}$. To jsou pak ovšem právě permutace tvaru $\sigma = \varrho \circ \eta$, kde ϱ je libovolná permutace množiny $\{1, \ldots, k\}$ a η je libovolná permutace množiny $\{k+1, \ldots, n\}$. Příslušný člen determinantu $|A|$ lze pak zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\wp(\sigma) \cdot a_{1\,\sigma(1)} \cdot a_{2\,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\sigma(n)} \\ &\qquad = \wp(\varrho) \cdot a_{1\,\varrho(1)} \cdot \ldots \cdot a_{k\,\varrho(k)} \cdot \wp(\eta) \cdot a_{k+1\,\eta(k+1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\,\eta(n)}, \end{aligned}$$

neboť z kapitoly o permutacích víme, že $\wp(\varrho \circ \eta) = \wp(\varrho) \cdot \wp(\eta)$. Vidíme tedy, že členy determinantu $|A|$, které je třeba uvažovat, jsou právě součiny libovolného členu determinantu $|B|$ s libovolným členem determinantu $|C|$. To ukazuje, že $|A| = |B| \cdot |C|$.

Následuje **Cauchyova věta**.

Věta. Pro každé dvě čtvercové matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ stejného řádu n platí $|A{\cdot}B| = |A| \cdot |B|$.

Důkaz. Sestavme čtvercovou matici H řádu $2n$ tvaru

$$H = \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix},$$

kde O je nulová čtvercová natice řádu n a $-E$ je opačná matice k jednotkové matici E řádu n. Pak podle předchozího tvrzení víme, že $|H| = |A| \cdot |B|$. Upravujme nyní matici H tak, aby na místě, kde v ní původně byla matice A, vznikla nulová matice O. Toho lze dosáhnout přičítáním vhodných násobků posledních n řádků matice H, tedy řádků matice $\begin{pmatrix} -E & B \end{pmatrix}$, k jejím prvním n řádkům, tedy k řádkům matice $\begin{pmatrix} A & O \end{pmatrix}$. Podle jednoho z dřívějších tvrzení víme, že se těmito úpravami nemění hodnota determinantu $|H|$. Všimněme si podrobně, jaké úpravy s maticí H je třeba udělat. Matici H lze detailně vypsat ve tvaru

$$H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyní, aby se pro zvolený index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ objevily v i-tém řádku matice H na prvních n pozicích nuly, je třeba k němu přičíst $(n+1)$-ní řádek matice H vynásobený prvkem a_{i1}, dále $(n+2)$-hý řádek matice H vynásobený prvkem a_{i2}, atd., až nakonec $2n$-tý řádek matice H vynásobený prvkem a_{in}. Tímto způsobem se ovšem současně na místě původně nulové matice O

v matici H objeví nová čtvercová matice C řádu n. Takže po provedení všech popsaných úprav obdržíme čtvercovou matici K řádu $2n$ tvaru

$$K = \begin{pmatrix} O & C \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

Přitom pro determinant této matice platí $|K| = |H|$. Zvolme kromě indexu $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dále index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a zjistěme, jaký prvek c_{ij} se objeví v matici C v jejím i-tém řádku a j-tém sloupci. Tedy určeme, jaký prvek se po výše specifikovaných úpravách objeví v i-tém řádku a v $(n + j)$-tém sloupci matice K. Půjde zřejmě o prvek $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj}$. To ale znamená, že $C = A \cdot B$. Podotkněme, že pak tedy máme $|C| = |A \cdot B|$. Přehodíme-li nakonec v matici K první řádek s $(n + 1)$-ním řádkem, druhý řádek s $(n + 2)$-hým řádkem, atd., až n-tý řádek s $2n$-tým řádkem, obdržíme čtvercovou matici L řádu $2n$ v polorozpadlém tvaru

$$L = \begin{pmatrix} -E & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

Poněvadž jsme provedli celkem n popsaných výměn řádků, pro determinanty matic K a L platí $|K| = (-1)^n \cdot |L|$. Dále podobně jako na začátku podle tvrzení předcházejícího této větě víme, že $|L| = |-E| \cdot |C| = (-1)^n \cdot |C|$, takže $|L| = (-1)^n \cdot |A \cdot B|$. Odtud a z předchozí rovnosti nakonec plyne, že $|K| = |A \cdot B|$. Protože $|K| = |H|$ a viděli jsme, že $|H| = |A| \cdot |B|$, dostáváme tak, že $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.