Lineární zobrazení

Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem $(T,+,\cdot)$. Nechť $f:\ \mathbf{V}\to\mathbf{W}$ je zobrazení splňující následující podmínky:

$$(\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V})(f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v})),$$
$$(\forall s\in T)(\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V})(f(s\cdot\mathbf{u})=s\cdot f(\mathbf{u})).$$

Pak f se nazývá **lineární zobrazení** nebo též **homomorfismus** vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbf{W},+,\cdot)$. Je přitom zřejmé, že uvedené dvě podmínky lze nahradit jedinou podmínkou:

$$(\forall s,t\in T)(\forall \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbf{V})(f(s\cdot\mathbf{u}+t\cdot\mathbf{v})=s\cdot f(\mathbf{u})+t\cdot f(\mathbf{v})).$$

Poněvadž lineární zobrazení f zmíněných vektorových prostorů je současně homomorfismem grupy $(\mathbf{V},+)$ do grupy $(\mathbf{W},+)$, z kapitoly o homomorfismech grup víme, že pak jsou splněny rovněž podmínky:

$$f(\mathbf{o})=\mathbf{o}\quad\text{a}\quad(\forall \mathbf{u}\in\mathbf{V})(f(-\mathbf{u})=-f(\mathbf{u})).$$

Je-li takové lineární zobrazení f vektorových prostorů $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ současně bijekcí množiny $\mathbf{V}$ na množinu $\mathbf{W}$, pak říkáme, že f je **izomorfismus** vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ na vektorový prostor $(\mathbf{W},+,\cdot)$.

Poznamenejme ještě, že ačkoliv u obou vektorových prostorů $(\mathbf{V},+,\cdot)$ i $(\mathbf{W},+,\cdot)$ užíváme týchž symbolů $+$ a $\cdot$ pro označení operací sčítání vektorů a vnějšího skalárního násobení, je to jenom kvůli notační jednoduchosti a nevyplývá z toho žádný jiný vztah mezi těmito operacemi v různých prostorech nežli ten, který je dán výše uvedenými definičními podmínkami lineárního zobrazení, resp. izomorfismu vektorových prostorů. Stejná poznámka se týká rovněž nulových vektorů $\mathbf{o}$ v obou vektorových prostorech.

Příklad. Nechť $(T,+,\cdot)$ je těleso a nechť m,n jsou přirozená čísla splňující $m \leq n$. Potom zobrazení $h : T^n \to T^m$ dané pro každá $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n \in T$ předpisem

$$\begin{aligned} &h\big((s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)\big) = \\ &\quad (s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n,\ s_2 + s_3 + \cdots + s_n,\ s_3 + \cdots + s_n,\ \ldots \\ &\qquad\qquad \ldots,\ s_m + \cdots + s_n,) \end{aligned}$$

je očividně lineárním zobrazením vektorového prostoru $(T^n,+,\cdot)$ do vektorového prostoru $(T^m,+,\cdot)$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{U},+,\cdot)$, $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T,+,\cdot)$ a nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení vektorových prostorů. Potom složené zobrazení $g \circ f : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ je rovněž lineární zobrazení příslušných vektorových prostorů.

Důkaz. Nechť $s,t \in T$ jsou libovolné prvky a nechť $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{U}$ jsou libovolné vektory. Pak vychází

$$\begin{aligned} (g \circ f)(s\cdot\mathbf{u} + t\cdot\mathbf{v}) &= g(f(s\cdot\mathbf{u} + t\cdot\mathbf{v})) = g(s \cdot f(\mathbf{u}) + t \cdot f(\mathbf{v})) \\ &= s \cdot g(f(\mathbf{u})) + t \cdot g(f(\mathbf{v})) = s \cdot (g \circ f)(\mathbf{u}) + t \cdot (g \circ f)(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

což bylo třeba ověřit.

Důkaz tohoto tvrzení byl obdobný důkazu analogického tvrzení pro homomorfismy grup. Rovněž následující tvrzení se dokáže podobně jako odpovídající tvrzení o izomorfismech grup.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T,+,\cdot)$ a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je izomorfismus těchto vektorových prostorů. Potom inverzní zobrazení $f^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$ je rovněž izomorfismem těchto vektorových prostorů.

Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq \mathbf{V}$ klademe $f(M) = \{f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in M\}$.

Podotkněme, že jsme tak mimo jiné též definovali, co je $f(\mathbf{U})$ pro libovolný podprostor $\mathbf{U}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení těchto vektorových prostorů. Pak pro každý podprostor $\mathbf{U}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je $f(\mathbf{U})$ podprostor ve vektorovém prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Je-li $M \subseteq \mathbf{V}$ podmnožina taková, že $\mathbf{U} = \langle M \rangle$, pak platí, že $f(\mathbf{U}) = \langle f(M) \rangle$.

Důkaz. Předně pro nulové vektory máme $\mathbf{o} = f(\mathbf{o})$, takže $\mathbf{o} \in f(\mathbf{U})$. Dále pro libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in f(\mathbf{U})$ existují vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{U}$ takové, že $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$ a $\mathbf{y} = f(\mathbf{v})$. Odtud pak plyne, že $\mathbf{x} + \mathbf{y} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, takže $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in f(\mathbf{U})$. Je-li navíc $s \in T$ libovolný prvek, pak $s \cdot \mathbf{x} = s \cdot f(\mathbf{u}) = f(s \cdot \mathbf{u})$, takže rovněž $s \cdot \mathbf{x} \in f(\mathbf{U})$. Je tedy $f(\mathbf{U})$ podprostor ve $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.

Nechť $M \subseteq \mathbf{V}$ je podmnožina taková, že $\mathbf{U} = \langle M \rangle$. Stejně jako výše pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in f(\mathbf{U})$ existuje vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ takový, že $\mathbf{x} = f(\mathbf{u})$. Podle posledního tvrzení z kapitoly o vektorových prostorech pak ale existují přirozené číslo n, prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ a vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in M$ takové, že $\mathbf{u} = s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{v}_n$. Poněvadž f je lineární zobrazení, plyne odtud, že $\mathbf{x} = f(\mathbf{u}) = f(s_1 \cdot \mathbf{v}_1 + s_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{v}_n) = s_1 \cdot f(\mathbf{v}_1) + s_2 \cdot f(\mathbf{v}_2) + \cdots + s_n \cdot f(\mathbf{v}_n)$. To ale znamená, že $\mathbf{x} \in \langle f(M) \rangle$. Takže platí, že $f(\mathbf{U}) = \langle f(M) \rangle$.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak množina vektorů $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}$ se nazývá **jádro** lineárního zobrazení f.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení těchto vektorových prostorů. Pak jádro $\operatorname{Ker} f$ tohoto lineárního zobrazení f je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Navíc platí, že zobrazení f je prosté právě tehdy, když $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$.

Důkaz. Pro nulové vektory máme $f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{o} \in \operatorname{Ker} f$. Dále pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$ platí, že $f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$ a $f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, odkud plyne, že $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}+\mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$. Je-li dále $s \in T$ libovolný prvek, pak rovněž $f(s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot f(\mathbf{u}) = s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$, takže také $s \cdot \mathbf{u} \in \operatorname{Ker} f$. Je tedy $\operatorname{Ker} f$ podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Je-li zobrazení f prosté, pak ovšem $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$. Nechť naopak $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{o}\}$. Pak pro libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, platí, že $f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} f$, čili $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{o}$, a tedy $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Je tedy zobrazení f prosté.

Budeme se dále věnovat lineárním zobrazením vektorových prostorů konečné dimenze. Nechť tedy $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory konečných dimenzí nad týmž tělesem a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak obraz $f(\mathbf{V})$ prostoru $\mathbf{V}$ při tomto zobrazení je podle předposledního tvrzení podprostorem ve vektorovém prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ a je to podprostor konečné dimenze. Dimenze tohoto podprostoru $f(\mathbf{V})$ se nazývá **hodnost** lineárního zobrazení f. Podobně jádro $\operatorname{Ker} f$ tohoto lineárního zobrazení je podle posledního tvrzerní podprostorem ve vektorovém prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a je to ovšem podprostor konečné dimenze. Dimenze podprostoru $\operatorname{Ker} f$ se nazývá **defekt** lineárního zobrazení f.

Příklad. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť m, n jsou přirozená čísla splňující $m \leq n$. Uvažme znovu lineární zobrazení h vektorového prostoru $(T^n +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(T^m +, \cdot)$ popsané v předchozím příkladu. Pak zobrazení h je očividně surjektivní, čili $h(T^n) = T^m$, takže hodnost zobrazení h je rovna m. Je-li $m = n$, pak jádro tohoto lineárního zobrazení h je zřejmě $\operatorname{Ker} h = \{\mathbf{o}\}$, takže defekt zobrazení h je roven 0. Je-li ovšem $m < n$, pak jádrem $\operatorname{Ker} h$ tohoto zobrazení h je podprostor v $(T^n+,\cdot)$ generovaný například vektory

$$\mathbf{g}_i = (\underbrace{0,\dots,0}_{m-1}, -1, \underbrace{0,\dots,0}_{i-1}, 1, \underbrace{0,\dots,0}_{n-m-i})$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-m$. Tyto vektory jsou ale lineárně nezávislé, takže tvoří bázi podprostoru $\operatorname{Ker} h$. Je tedy defekt zobrazení h roven $n-m$.

Věta. Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a $(\mathbf{W},+,\cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T,+,\cdot)$ konečných dimenzí a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení. Pak pro dimenzi n prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ a pro hodnost k a defekt ℓ lineárního zobrazení f platí, že $k + \ell = n$.

Důkaz. Zvolme bázi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ podprostoru $f(\mathbf{V})$. Dále zvolme vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$ tak, aby platilo $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, $\dots$, $f(\mathbf{v}_k) = \mathbf{w}_k$. Zvolme také bázi $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\ell$ podprostoru $\operatorname{Ker} f$. Ukážeme, že potom vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\ell$ tvoří dohromady bázi prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$.

Nechť tedy $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ je libovolný vektor. Pak $f(\mathbf{x}) \in f(\mathbf{V})$, takže existují prvky $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ takové, že $f(\mathbf{x}) = t_1\cdot\mathbf{w}_1 + t_2\cdot\mathbf{w}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{w}_k$. Položme $\mathbf{y} = t_1\cdot\mathbf{v}_1 + t_2\cdot\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{v}_k$. Pak ovšem $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$. Položme dále $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Pak ale $f(\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) = \mathbf{o}$, takže $\mathbf{z} \in \operatorname{Ker} f$. Existují tedy prvky $s_1, s_2, \dots, s_\ell \in T$ takové, že $\mathbf{z} = s_1\cdot\mathbf{u}_1 + s_2\cdot\mathbf{u}_2 + \dots + s_\ell\cdot\mathbf{u}_\ell$. Odtud plyne, že $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z} = t_1\cdot\mathbf{v}_1 + t_2\cdot\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{v}_k + s_1\cdot\mathbf{u}_1 + s_2\cdot\mathbf{u}_2 + \dots + s_\ell\cdot\mathbf{u}_\ell$. To znamená, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\ell$ generují celý prostor $\mathbf{V}$.

Ukážeme dále, že jsou tyto vektory lineárně nezávislé. Nechť tedy $t_1, t_2, \dots, t_k \in T$ a $s_1, s_2, \dots, s_\ell \in T$ jsou takové prvky, že $t_1\cdot\mathbf{v}_1 + t_2\cdot\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{v}_k + s_1\cdot\mathbf{u}_1 + s_2\cdot\mathbf{u}_2 + \dots + s_\ell\cdot\mathbf{u}_\ell = \mathbf{o}$. Odtud plyne, že $t_1\cdot\mathbf{v}_1 + t_2\cdot\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{v}_k = -s_1\cdot\mathbf{u}_1 - s_2\cdot\mathbf{u}_2 - \dots - s_\ell\cdot\mathbf{u}_\ell$. To ale znamená, že $t_1\cdot\mathbf{v}_1 + t_2\cdot\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{v}_k \in \operatorname{Ker} f$, takže $f(t_1\cdot\mathbf{v}_1 + t_2\cdot\mathbf{v}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{v}_k) = \mathbf{o}$. Neboli to znamená, že $t_1\cdot\mathbf{w}_1 + t_2\cdot\mathbf{w}_2 + \dots + t_k\cdot\mathbf{w}_k = \mathbf{o}$. Poněvadž vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$ jsou lineárně nezávislé, plyne odtud, že $t_1 = t_2 = \dots = t_k = 0$.

Takto dostáváme, že $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell = \mathbf{o}$. Poněvadž také vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ jsou lineárně nezávislé, plyne odtud též, že $s_1 = s_2 = \cdots = s_\ell = 0$. Tvoří tedy vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_\ell$ bázi vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. To ale znamená, že $k + \ell = n$.

Základní význam, pokud jde o lineární zobrazení vektorových prostorů konečné dimenze, má následující fakt ozřejmující možnou rozmanitost těchto lineárních zobrazení.

Věta. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem $(T, +, \cdot)$ konečných dimenzí. Nechť dále vektory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ tvoří bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak pro každou volbu vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathbf{W}$ existuje jediné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ těchto vektorových prostorů takové, že $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{z}_2, \ldots, f(\mathbf{g}_n) = \mathbf{z}_n$.

Důkaz. Víme, že pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existují jednoznačně určené prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, nazývané souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$, takové, že platí $\mathbf{u} = s_1 \cdot \mathbf{g}_1 + s_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{g}_n$. Definujme zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ tak, že v této situaci každému takovému vektoru $\mathbf{u}$ přiřadíme vektor $f(\mathbf{u}) = s_1 \cdot \mathbf{z}_1 + s_2 \cdot \mathbf{z}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{z}_n$ z $\mathbf{W}$. Pak se přímo ověří, že f je lineární zobrazení, a je jasné, že f splňuje předepsané podmínky.

Nechť naopak $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení takové, že $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{z}_2, \ldots, f(\mathbf{g}_n) = \mathbf{z}_n$. Pak pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ vyjádřený ve tvaru $\mathbf{u} = s_1 \cdot \mathbf{g}_1 + s_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{g}_n$ stejně jako v předchozím odstavci platí, že $f(\mathbf{u}) = s_1 \cdot f(\mathbf{g}_1) + s_2 \cdot f(\mathbf{g}_2) + \cdots + s_n \cdot f(\mathbf{g}_n) = s_1 \cdot \mathbf{z}_1 + s_2 \cdot \mathbf{z}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{z}_n$. To ukazuje, že lineární zobrazení f je takto určeno jednoznačně.

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a je-li $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do něj samotného, pak říkáme,že f je **lineární transformace** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.