Matice lineárních zobrazení

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí n a m nad tělesem $(T, +, \cdot)$, nechť posloupnosti vektorů $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n \in \mathbf{V}$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m \in \mathbf{W}$ tvoří báze těchto vektorových prostorů a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi těmito prostory. Nechť pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou prvky $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in T$ souřadnice vektoru $f(\mathbf{g}_j)$ v bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$, takže platí $f(\mathbf{g}_j) = a_{1j} \cdot \mathbf{h}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + a_{mj} \cdot \mathbf{h}_m$. Pak matice $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\, j=1,\ldots,n}$ typu m/n nad $(T, +, \cdot)$ se nazývá **matice lineárního zobrazení f v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$** a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$. Je-li přitom prostor $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ identický s prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, takže $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární transformace vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, a je-li dále báze $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ identická s bazí $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ tohoto prostoru, pak $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,n}$ je čtvercová matice řádu n nad $(T, +, \cdot)$ a nazývá se **matice lineární transformace f v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$**.

Věta. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť posloupnosti $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ tvoří báze těchto vektorových prostorů. Pak přiřazení, v němž každému lineárnímu zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ odpovídá jeho matice A v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$, je vzájemně jednoznačnou korespondencí mezi všemi lineárními zobrazeními $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ a všemi maticemi $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(T, +, \cdot)$.

Důkaz. Mají-li dvě lineární zobrazení $f, g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ stejnou matici v uvedených bázích, pak to znamená, že $f(\mathbf{g}_1) = g(\mathbf{g}_1)$, $f(\mathbf{g}_2) = g(\mathbf{g}_2)$, $\ldots$, $f(\mathbf{g}_n) = g(\mathbf{g}_n)$. Podle poslední věty z minulé kapitoly pak ale f a g jsou jedno a to stejné zobrazení. Je tedy zmíněné přiřazení prosté.

Vezměme dále libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(T, +, \cdot)$, a uvažme vektory $\mathbf{z}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{h}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + a_{mj} \cdot \mathbf{h}_m$

pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pak podle poslední věty z minulé kapitoly existuje lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ takové, že $f(\mathbf{g}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{g}_2) = \mathbf{z}_2$, ..., $f(\mathbf{g}_n) = \mathbf{z}_n$. Maticí tohoto lineárního zobrazení ve zmíněných bázích je ovšem matice A. Je tedy popsaná korespondence opravdu vzájemně jednoznačná.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí n a m nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi těmito prostory a nechť $A = (a_{ij})$ je matice tohoto lineárního zobrazení v bazích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ zmíněných vektorových prostorů. Nechť $\mathbf{u}$ je libovolný vektor z $\mathbf{V}$, nechť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a nechť $y_1, y_2, \ldots, y_m$ jsou souřadnice vektoru $f(\mathbf{u})$ v bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$. Pak platí

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Máme $\mathbf{u} = x_1 \cdot \mathbf{g}_1 + x_2 \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + x_n \cdot \mathbf{g}_n$, takže vychází $f(\mathbf{u}) = x_1 \cdot f(\mathbf{g}_1) + x_2 \cdot f(\mathbf{g}_2) + \cdots + x_n \cdot f(\mathbf{g}_n) = x_1 \cdot (a_{11} \cdot \mathbf{h}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + a_{m1} \cdot \mathbf{h}_m) + x_2 \cdot (a_{12} \cdot \mathbf{h}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + a_{m2} \cdot \mathbf{h}_m) + \cdots + x_n \cdot (a_{1n} \cdot \mathbf{h}_1 + a_{2n} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + a_{mn} \cdot \mathbf{h}_m) = (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n) \cdot \mathbf{h}_1 + (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n) \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + (a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n) \cdot \mathbf{h}_m$. Poněvadž současně $f(\mathbf{u}) = y_1 \cdot \mathbf{h}_1 + y_2 \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + y_m \cdot \mathbf{h}_m$, z jednoznačnosti souřadnic vektoru $f(\mathbf{u})$ v bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ a z definice násobení matic plyne dokazovaná rovnost.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{U}, +, \cdot)$, $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečných dimenzí nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$ jsou báze těchto vektorových prostorů. Nechť $f : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $g : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení vektorových prostorů, nechť $A = (a_{ij})$

je matice zobrazení f v bázích $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ a nechť $B = (b_{hi})$ je matice zobrazení g v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_m$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$. Potom matice $B \cdot A$ je maticí složeného zobrazení $g \circ f : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ v bázích $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$.

Důkaz. Podle definice matic lineárních zobrazení pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ máme $(g \circ f)(\mathbf{f}_j) = g(f(\mathbf{f}_j)) = g(a_{1j} \cdot \mathbf{g}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + a_{mj} \cdot \mathbf{g}_m) = a_{1j} \cdot g(\mathbf{g}_1) + a_{2j} \cdot g(\mathbf{g}_2) + \cdots + a_{mj} \cdot g(\mathbf{g}_m) = a_{1j} \cdot (b_{11} \cdot \mathbf{h}_1 + b_{21} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + b_{k1} \cdot \mathbf{h}_k) + a_{2j} \cdot (b_{12} \cdot \mathbf{h}_1 + b_{22} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + b_{k2} \cdot \mathbf{h}_k) + \cdots + a_{mj} \cdot (b_{1m} \cdot \mathbf{h}_1 + b_{2m} \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + b_{km} \cdot \mathbf{h}_k) = (b_{11} \cdot a_{1j} + b_{12} \cdot a_{2j} + \cdots + b_{1m} \cdot a_{mj}) \cdot \mathbf{h}_1 + (b_{21} \cdot a_{1j} + b_{22} \cdot a_{2j} + \cdots + b_{2m} \cdot a_{mj}) \cdot \mathbf{h}_2 + \cdots + (b_{k1} \cdot a_{1j} + b_{k2} \cdot a_{2j} + \cdots + b_{km} \cdot a_{mj}) \cdot \mathbf{h}_k$. Koeficienty v poslední uvedené lineární kombinaci vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_k$ jsou ovšem právě prvky j-tého sloupce matice $B \cdot A$. Je tedy tato matice maticí složeného lineárního zobrazení $g \circ f$ v uvedených bázích.

Důsledek. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové vektorové prostory konečné dimenze nad tělesem $(T, +, \cdot)$, nechť $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ jsou báze těchto prostorů, nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je izomorfismus těchto prostorů a nechť A je matice izomorfismu f v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$. Pak platí $n = m$, A je čtvercová regulární matice a matice A^{-1} k ní inverzní je maticí inverzního izomorfismu $f^{-1} : \mathbf{W} \to \mathbf{V}$.

Důkaz. Izomorfní vektorové prostory musí mít stejnou dimenzi, takže $n = m$ a matice A je čtvercová. Nechť dále B je matice inverzního izomorfismu f^{-1} v bázích $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Pak podle předchozího tvrzení je matice $A \cdot B$ maticí složeného zobrazení $f \circ f^{-1}$, jímž je ale identické zobrazení $id_{\mathbf{W}}$. Maticí této identické transformace prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ v bázi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ je ovšem jednotková matice E_m. Odtud plyne, že $A \cdot B = E_m$, takže A je regulární matice a $B = A^{-1}$.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze tohoto prostoru. Již dříve jsme definovali, co znamená, že A je matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Nyní je na místě si všimnout, že A je takovou maticí přechodu právě tehdy, když A je maticí identického zobrazení $id_{\mathbf{V}}$ na daném prostoru vzhledem k bázím $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ (v tomto pořadí).

Důsledek. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové prostory konečných dimenzí n a m nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ a $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_m$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Nechť P je matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a nechť Q je matice přechodu od báze $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ k bázi $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_m$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi uvedenými prostory, nechť A je matice zobrazení f v bázích $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$ a nechť B je matice zobrazení f v bázích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_m$. Pak platí $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Důkaz. Poněvadž $f \circ id_{\mathbf{V}} = id_{\mathbf{W}} \circ f$ je totéž zobrazení f a poněvadž podle výše uvedeného tvrzení o matici složeného lineárního zobrazení a podle komentáře předcházejícího tomuto důsledku je $A \cdot P$ maticí zobrazení $f \circ id_{\mathbf{V}}$ a $Q \cdot B$ je maticí zobrazení $id_{\mathbf{W}} \circ f$, obojí v bazích $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_m$, plyne odtud, že $A \cdot P = Q \cdot B$, takže $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

Půjde-li dále jen o lineární transformaci jednoho vektorového prostoru a o její matice ve dvou bázích tohoto prostoru, pak se formulace posledního důsledku zjednoduší následovně:

Důsledek. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$, nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze tohoto prostoru a nechť P je matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je lineární transformace prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, nechť A je matice transformace f v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a nechť B je matice transformace f v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Pak platí $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.