Matice přechodu

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ představují některou bázi tohoto prostoru. Pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existují jednoznačně určené prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ takové, že $\mathbf{u} = s_1{\cdot}\mathbf{f}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{f}_n$. Prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se pak nazývají **souřadnice** vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť posloupnosti $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ tvoří dvě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Nechť pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ souřadnice vektoru $\mathbf{g}_j$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, takže $\mathbf{g}_j = a_{1j}{\cdot}\mathbf{f}_1 + a_{2j}{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{nj}{\cdot}\mathbf{f}_n$. Pak čtvercová matice $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,n,\, j=1,\ldots,n}$ nad $(T, +, \cdot)$ se nazývá **matice přechodu** od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Nechť $\mathbf{u}$ je libovolný vektor z $\mathbf{V}$ a nechť $s_1, s_2, \ldots, s_n$, resp. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, resp. v bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Pak platí

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Máme $\mathbf{u} = t_1{\cdot}\mathbf{g}_1 + t_2{\cdot}\mathbf{g}_2 + \cdots + t_n{\cdot}\mathbf{g}_n = t_1{\cdot}(a_{11}{\cdot}\mathbf{f}_1 + a_{21}{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{n1}{\cdot}\mathbf{f}_n) + t_2{\cdot}(a_{12}{\cdot}\mathbf{f}_1 + a_{22}{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{n2}{\cdot}\mathbf{f}_n) + \cdots + t_n{\cdot}(a_{1n}{\cdot}\mathbf{f}_1 + a_{2n}{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + a_{nn}{\cdot}\mathbf{f}_n) = (a_{11}{\cdot}t_1 + a_{12}{\cdot}t_2 + \cdots + a_{1n}{\cdot}t_n){\cdot}\mathbf{f}_1 + (a_{21}{\cdot}t_1 + a_{22}{\cdot}t_2 + \cdots + a_{2n}{\cdot}t_n){\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + (a_{n1}{\cdot}t_1 + a_{n2}{\cdot}t_2 + \cdots + a_{nn}{\cdot}t_n){\cdot}\mathbf{f}_n$ a současně $\mathbf{u} = s_1{\cdot}\mathbf{f}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{f}_n$. Vzhledem k jednoznačnosti souřadnic vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ odtud a z definice násobení matic plyne dokazovaná rovnost.

Ukážeme nyní, jakým způsobem se uplatní inverzní matice v problematice vektorových prostorů.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ jsou dvě báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ k bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$. Pak A je regulární matice a matice A^{-1} k ní inverzní je maticí přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$.

Důkaz. Označme zprvu $B = (b_{ij})$ matici přechodu od báze $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ k bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$. Podle toho, co bylo řečeno v kapitole o regulárních maticích, zcela stačí, když ukážeme, že součin $A \cdot B$ je jednotková matice E_n řádu n. Ovšem podle definice matic přechodu pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je $\mathbf{g}_j = a_{1j} \cdot \mathbf{f}_1 + a_{2j} \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + a_{nj} \cdot \mathbf{f}_n$ a současně pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je také $\mathbf{f}_j = b_{1j} \cdot \mathbf{g}_1 + b_{2j} \cdot \mathbf{g}_2 + \cdots + b_{nj} \cdot \mathbf{g}_n$. Takže odtud dosazením pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vychází, že

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_j = {} & b_{1j} \cdot (a_{11} \cdot \mathbf{f}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + a_{n1} \cdot \mathbf{f}_n) + \\
& b_{2j} \cdot (a_{12} \cdot \mathbf{f}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + a_{n2} \cdot \mathbf{f}_n) + \cdots + \\
& b_{nj} \cdot (a_{1n} \cdot \mathbf{f}_1 + a_{2n} \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + a_{nn} \cdot \mathbf{f}_n) = \\
& (a_{11} \cdot b_{1j} + a_{12} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{nj}) \cdot \mathbf{f}_1 + \\
& (a_{21} \cdot b_{1j} + a_{22} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{nj}) \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + \\
& (a_{n1} \cdot b_{1j} + a_{n2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{nn} \cdot b_{nj}) \cdot \mathbf{f}_n.
\end{aligned}$$

V poslední lineární kombinaci jsou ovšem koeficienty u vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ právě prvky j-tého sloupce matice $A \cdot B$. Poněvadž souřadnice každého vektoru z $\mathbf{V}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ jsou určeny jednoznačně (a to platí i pro vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ samotné), a poněvadž máme $\mathbf{f}_j = 0 \cdot \mathbf{f}_1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{f}_{j-1} + 1 \cdot \mathbf{f}_j + 0 \cdot \mathbf{f}_{j+1} + \cdots + 0 \cdot \mathbf{f}_n$ pro všechna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, plyne odtud, že $A \cdot B = E_n$, jak bylo třeba. Takže skutečně $B = A^{-1}$.