Soustavy lineárních rovnic

Buď $(T, +, \cdot)$ těleso. Pak soustava rovnic

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &=& b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &=& b_2, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &=& b_m, \end{array}$$

kde m, n jsou přirozená čísla, $a_{ij} \in T$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ a $b_i \in T$ pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m$, se nazývá **soustava m lineárních rovnic o n neznámých** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Prvky a_{ij} se nazývají **koeficienty** a prvky b_i **absolutní členy** této soustavy. **Řešením** této soustavy rozumíme každou n-tici prvků $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ takovou, že po dosazení t_j za x_j pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$ přejdou všechny uvedené rovnice v identity, tj. na levé straně každé rovnice vyjde prvek rovný absolutnímu členu na pravé straně rovnice. Matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

se nazývají **matice soustavy**, resp. **rozšířená matice soustavy**. Označíme-li $A = (a_{ij})$ matici soustavy, tj. matici složenou z koeficientů této soustavy, a zavedeme-li vektor absolutních členů $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ a vektor neznámých $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, můžeme soustavu napsat v maticovém tvaru

$$A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top,$$

kde transponované vektory bereme jako matice o jednom sloupci. Řešením soustavy je pak každý vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ z T^n, pro který platí rovnost $A \cdot \mathbf{t}^\top = \mathbf{b}^\top$. Je tedy množina všech řešení dané soustavy nějakou podmnožinou v T^n.

Ukážeme, jak najít a přístupným způsobem popsat všechna řešení kterékoliv zadané soustavy lineárních rovnic. Uvidíme, že taková soustava nemusí mít řešení žádné, může mít řešení jediné anebo může mít řešení mnoho. Soustava lineárních rovnic se nazývá **řešitelná**, má-li alespoň jedno řešení. Následující **Frobeniova věta** poskytuje kritérium pro zjištění řešitelnosti dané soustavy.

Věta. Buď $(T, +, \cdot)$ těleso, buď $A = (a_{ij})$ matice typu m/n nad $(T, +, \cdot)$ a buď $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vektor z T^m. Potom soustava lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy, tj. hodnost matice A, je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. hodnosti matice $\left(A|\mathbf{b}^\top\right)$.

Důkaz. Je-li soustava $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ řešitelná, existuje vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ z T^n takový, že $A \cdot \mathbf{t}^\top = \mathbf{b}^\top$. Podle definice násobení matic to znamená, že sloupec $\mathbf{b}^\top$ je lineární kombinací sloupců matice A s koeficienty $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Generují tedy sloupce obou matic A i $(A|\mathbf{b}^\top)$ tentýž podprostor ve vektorovém prostoru $(T^m, +, \cdot)$. Mají tudíž obě tyto matice stejnou hodnost.

Naopak mají-li obě matice A a $(A|\mathbf{b}^\top)$ stejnou hodnost, generují sloupce těchto matic podprostory v $(T^m, +, \cdot)$ stejné dimenze, a poněvadž první z nich je obsažen ve druhém, musí tyto podprostory splynout. Poněvadž tyto podprostory vznikají tvorbou lineárních kombinací sloupců matic A a $(A|\mathbf{b}^\top)$, znamená to, že sloupec $\mathbf{b}^\top$ je nějakou lineární kombinací sloupců matice A, řekněme s koeficienty $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$. Pak ovšem vektor $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je řešením soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$.

Věnujme se nejprve speciálnímu případu, kdy matice dané soustavy lineárních rovnic je čtvercová a regulární. Pak rozšířená matice této soustavy pochopitelně nemůže mít větší hodnost, takže podle Frobeniovy věty taková soustava je řešitelná. Uvidíme dále, že tato soustava má jediné řešení a jeho tvar udává následující **Cramerovo pravidlo**.

Věta. Buď $(T, +, \cdot)$ těleso, buď $A = (a_{ij})$ regulární čtvercová matice řádu n nad $(T, +, \cdot)$ a buď $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektor z T^n. Potom soustava lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ má jediné řešení $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ je

$$t_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

přičemž A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem $\mathbf{b}^\top$.

Důkaz. Buď $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ řešení soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$, takže platí $A \cdot \mathbf{t}^\top = \mathbf{b}^\top$. Poněvadž matice A je regulární, existuje k ní inverzní matice A^{-1}. Vynásobíme-li touto maticí poslední rovnost zleva, obdržíme, že $A^{-1} \cdot A \cdot \mathbf{t}^\top = A^{-1} \cdot \mathbf{b}^\top$, takže vychází, že $\mathbf{t}^\top = A^{-1} \cdot \mathbf{b}^\top$. Je tedy takto řešení $\mathbf{t}$ dané soustavy určeno jednoznačně. Ukážeme, že má výše uvedený tvar.

Podle poslední věty z kapitoly o regulárních maticích máme $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$, kde A^* je adjungovaná matice k matici A. Je to transponovaná matice k matici složené z algebraických doplňků $\widehat{A}_{ij}$ prvků a_{ij} matice A. Z rovnosti $\mathbf{t}^\top = A^{-1} \cdot \mathbf{b}^\top$ tedy plyne rovnost $\mathbf{t}^\top = |A|^{-1} \cdot A^* \cdot \mathbf{b}^\top$, což znamená, že pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ je $t_j = |A|^{-1} \cdot (\widehat{A}_{1j} \cdot b_1 + \widehat{A}_{2j} \cdot b_2 + \cdots + \widehat{A}_{nj} \cdot b_n)$. Výraz v závorce je ovšem možno vidět jako Laplaceův rozvoj podle j-tého sloupce determinantu z matice, která se od matice A liší tím, že její j-tý sloupec byl nahrazen sloupcem $\mathbf{b}^\top$. Tedy jde právě o matici A_j, jak byla definována výše. Takže tímto způsobem vychází, že $t_j = |A|^{-1} \cdot |A_j|$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Věnujme se dále jinému speciálnímu případu. Mějme obecnou soustavu lineárních rovnic tak, jak byla zadána na začátku. Jsou-li přitom všechny absolutní členy této soustavy rovny nule, tedy má-li daná soustava tvar

$$A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top,$$

kde $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ je nulový vektor z T^m, pak mluvíme o tom, že je dána **homogenní soustava** m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Jedním z řešení takové soustavy je jistě nulový vektor $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ z T^n.

Tvrzení. Množina všech řešení homogenní soustavy m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$ tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(T^n, +, \cdot)$.

Důkaz. Již jsme poznamenali, že nulový vektor $\mathbf{o}$ z T^n je řešením takové homogenní soustavy lineárních rovnic. Dále jsou-li $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ a $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ libovolné dva vektory z T^n, které jsou řešeními dané homogenní soustavy lineárních rovnic, a je-li $r \in T$ libovolný prvek, pak očividně také vektory $\mathbf{s}+\mathbf{t}$ a $r\cdot\mathbf{s}$ jsou rovněž řešeními této soustavy. Tvoří tedy množina všech řešení takové soustavy podprostor v prostoru $(T^n, +, \cdot)$.

Poněvadž tedy množina všech řešení homogenní soustavy o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$ tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(T^n, +, \cdot)$, což je prostor konečné dimenze n, má také prostor všech řešení takové homogenní soustavy konečnou dimenzi $k \leq n$.

Tvrzení. Množina všech řešení homogenní soustavy m lineárních rovnic o n neznámých s maticí koeficientů $A = (a_{ij})$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor dimenze $k = n - \mathrm{h}(A)$, kde $\mathrm{h}(A)$ je hodnost matice A.

Poznámka. V následujícím důkazu popíšeme i metodu, jak najít bázi vektorového prostoru všech řešení dané homogenní soustavy lineárních rovnic.

Důkaz. V kapitole o hodnosti matic jsme popsali elementární řádkové úpravy matice A. Snadno lze přímo ověřit, že prováděním elementárních řádkových úprav s maticí A se nemění množina všech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$ určené touto maticí. Dále jsme v kapitole o hodnosti matic viděli, že matici A lze elementárními řádkovými úpravami převést až na Gauss-Jordanův tvar. Můžeme tedy dále předpokládat, že matice A už je v Gauss-Jordanově tvaru. Je-li A nulová matice, je množinou všech řešení zmíněné homogenní soustavy celý prostor T^n, který má dimenzi n. Předpokládejme tedy dále, že A je nenulová matice. Poněvadž její hodnost je $\mathrm{h}(A)$, má tato matice právě tolik nenulových řádků a také tolik hlavních prvků. Nechť $j_1, j_2, \ldots, j_{\mathrm{h}(A)}$ jsou indexy těch sloupců matice A, v nichž leží hlavní prvky. Je tedy v prvních $\mathrm{h}(A)$ řádcích a ve sloupcích s jmenovanými indexy obsažena jednotková matice řádu $\mathrm{h}(A)$; zbývající řádky, jsou-li nějaké, jsou nulové. Je-li $\mathrm{h}(A) = n$, pak tato jednotková matice vyplňuje celou horní část matice A pozůstávající z prvních n řádků. Tehdy je ale jediným řešením zmíněné soustavy rovnic nulový vektor $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ z T^n, který tvoří nulový podprostor $\{\mathbf{o}\}$ dimenze 0. Zabývejme se tedy dále situací, kdy $0 < \mathrm{h}(A) < n$.

Zaveďme terminologii, že složkám řešení $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ homogenní soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$, jejichž indexy leží v množině $\{1, 2, \ldots, n\} - \{j_1, j_2, \ldots, j_{\mathrm{h}(A)}\}$, budeme říkat **volné** složky. Potom je ale evidentní, že vezmeme-li vektor $\mathbf{t}$ z T^n takovým způsobem, že jeho volné složky zvolíme jako libovolné prvky z T, pak zbývající složky $t_{j_1}, t_{j_2}, \ldots, t_{j_{\mathrm{h}(A)}}$ můžeme dopočítat tak, aby vektor $\mathbf{t}$ byl řešením soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Tento dopočet je přitom jednoznačný. Poněvadž počet volných složek vektoru $\mathbf{t}$ je roven číslu $k = n - \mathrm{h}(A)$, můžeme takto vytvořit k lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ z T^n, které jsou řešeními dané homogenní soustavy lineárních rovnic — stačí vždy jednu volnou složku zvolit rovnu 1 a ostatní volné složky položit rovny 0. Z jednoznačnosti dopočtu složek vektoru $\mathbf{t}$ s indexy $j_1, j_2, \ldots, j_{\mathrm{h}(A)}$ pak plyne, že zmíněné vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ již generují celý prostor všech řešení $\mathbf{t}$ dané soustavy. Skutečně zvolíme-li volné složky vektoru $\mathbf{t}$ jakkoliv, bude výsledný vektor $\mathbf{t}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ s koeficienty, jimiž jsou právě zmíněné volné složky tohoto vektoru $\mathbf{t}$. Tvoří tedy vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ bázi vektorového prostoru všech řešení dané soustavy rovnic, takže tento prostor má dimenzi $k = n - \mathrm{h}(A)$.

Platí ale i tvrzení obrácené vůči tvrzení právě dokázanému:

Tvrzení. Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a buď $\mathbf{W} \subseteq T^n$ libovolný podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ dimenze $k \leq n$. Pak existuje homogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$ s maticí koeficientů $A = (a_{ij})$ hodnosti $\mathrm{h}(A) = n - k$, jejíž všechna řešení tvoří právě podprostor $\mathbf{W}$.

Důkaz. Je-li $k = n$, tedy je-li $\mathbf{W} = T^n$, pak lze vzít za A nulovou matici (s libovolným počtem řádků). Je-li $k = 0$, tedy je-li $\mathbf{W}$ nulový podprostor, pak lze vzít za A jednotkovou matici E_n řádu n. Zabývejme se tedy dále situací, kdy $0 < k < n$. Buď $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$ libovolná báze podprostoru $\mathbf{W}$. Vytvořme nejprve matici B tak, že za její řádky vezmeme právě vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$. Pak hodnost $\mathrm{h}(B) = k$. Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic $B \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Podle předchozího tvrzení je množinou všech řešení této soustavy nějaký podprostor $\mathbf{U} \subseteq T^n$ dimenze $n - k$. Vezměme nyní libovolnou bázi $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{n-k}$ podprostoru $\mathbf{U}$ a sestavme matici A tak, že za její řádky vezmeme tentokrát vektory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{n-k}$. Pak ovšem pro hodnost této matice platí $\mathrm{h}(A) = n - k$. Vzniká tak homogenní soustava lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Opět podle předchozího tvrzení je množinou všech řešení této poslední soustavy nějaký podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ dimenze k. Ukážeme, že je to právě výchozí podprostor $\mathbf{W}$. Poněvadž oba zmíněné podprostory mají stejnou dimenzi k, stačí ukázat, že vektory podprostoru $\mathbf{W}$ jsou řešeními soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Znovu poněvadž množina všech řešení této soustavy rovnic tvoří podprostor vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$, postačí jenom ukázat, že vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_k$, jež tvoří bázi podprostoru $\mathbf{W}$, jsou řešeními soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Vzhledem ke konstrukci matic A a B je ale tato poslední podmínka ekvivaventní tomu, že vektory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_{n-k}$ jsou řešeními soustavy rovnic $B \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Tak tomu ale podle výše popsané konstrukce opravdu je.

Věnujme se konečně obecné soustavě lineárních rovnic

$$A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top,$$

kde $A = (a_{ij})$ je matice typu m/n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ je vektor z prostoru $(T^m, +, \cdot)$, tak jak byla zadána na počátku této kapitoly. Zaměníme-li v ní vektor $\mathbf{b}$ nulovým vektorem $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$, získáme soustavu rovnic

$$A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top,$$

o které mluvíme jako o **zhomogenizované soustavě** lineárních rovnic. V této situaci platí následující fakt.

Tvrzení. Je-li soustava lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ řešitelná, pak pro libovolný vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ z T^n, který je řešením této soustavy, platí, že množina všech řešení soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ má tvar

$$\mathbf{s} + \mathbf{W} = \{\mathbf{s} + \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathbf{W}\},$$

kde $\mathbf{W} \subseteq T^n$ je vektorový podprostor všech řešení zhomogenizované soustavy lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$.

Důkaz. Buď $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ libovolný vektor z T^n, který je řešením soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$. Položme $\mathbf{z} = \mathbf{t} - \mathbf{s}$. Potom $A \cdot \mathbf{z}^\top = A \cdot \mathbf{t}^\top - A \cdot \mathbf{s}^\top = \mathbf{b}^\top - \mathbf{b}^\top = \mathbf{o}^\top$, čili vektor $\mathbf{z}$ je řešením zhomogenizované soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$, takže $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$ a přitom $\mathbf{t} = \mathbf{s} + \mathbf{z}$.

Nechť naopak $\mathbf{z} \in \mathbf{W}$ je libovolný vektor, tedy nechť $\mathbf{z}$ je libovolné řešení zhomogenizované soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Uvažme vektor $\mathbf{t} = \mathbf{s} + \mathbf{z}$. Potom pro tento vektor vychází, že $A \cdot \mathbf{t}^\top = A \cdot \mathbf{s}^\top + A \cdot \mathbf{z}^\top = \mathbf{b}^\top + \mathbf{o}^\top = \mathbf{b}^\top$, takže vektor $\mathbf{t}$ je řešením zadané soustavy lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$.

V kontextu posledního tvrzení se používá následující terminologie. Je-li $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ libovolná řešitelná soustava m lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$, pak jeden každý vektor $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ z prostoru $(T^n, +, \cdot)$, který je řešením této soustavy, se nazývá **partikulární řešení** soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$. Množinu všech řešení této soustavy lze potom získat tak, že k jednomu jejímu partikulárnímu řešení se postupně přičtou všechna řešení příslušné zhomogenizované soustavy rovnic. V důkazu tvrzení o dimenzi vektorového prostoru všech řešení dané homogenní soustavy lineárních rovnic jsme dále viděli, jakým způsobem je možno najít bázi podprostoru $\mathbf{W}$ vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$, který je množinou všech řešení zhomogenizované soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$. Libovolná báze $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ vektorového podprostoru $\mathbf{W}$ všech řešení této zhomogenizované soustavy se pak nazývá **fundamentální systém řešení** zadané soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$. Pak platí, že $\mathbf{W} = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k \rangle$, takže množinu všech řešení soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ lze explicitně zapsat ve tvaru

$$\mathbf{s} + \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k \rangle.$$

Zbývá popsat metodu, jak najít alespoň jedno partikulární řešení $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ soustavy lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$. Opět je snadné se přesvědčit, že prováděním elementárních řádkových úprav, tentokrát ovšem s celou rozšířenou maticí $(A|\mathbf{b}^\top)$ soustavy, se nezmění množina všech řešení soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$. Dále zase můžeme elementárními řádkovými úpravami převést rozšířenou matici $(A|\mathbf{b}^\top)$ až na Gauss-Jordanův tvar. Vyjde-li poslední nenulový řádek v tomto tvaru tak, že má svůj hlavní prvek až v posledním, odděleném sloupci, pak má rozšířená matice $(A|\mathbf{b}^\top)$ větší hodnost než matice A, takže podle Frobeniovy věty nemá soustava $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ řešení. V opačném případě zvolíme partikulární řešení $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ soustavy $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ například tak, že všechny jeho volné složky položíme rovny 0 a zbývající složky vekoru $\mathbf{s}$ pak jednoznačně vyjdou. Poté soustavu zhomogenizujeme a způsobem popsaným v důkazu již citovaného tvrzení, opět s použitím Gauss-Jordanova tvaru matice A, najdeme fundamentální systém řešení $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k$ soustavy rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$. Tím podle předchozího výkladu získáme všechna potřebná data ke kompletnímu popisu množiny všech řešení této soustavy rovnic. Tento postup se nazývá **Gaussova eleminační metoda** řešení soustav lineárních rovnic.

Je-li $(T, +, \cdot)$ těleso, je-li $\mathbf{s}$ libovolný vektor z T^n a je-li $\mathbf{W}$ podprostor v $(T^n, +, \cdot)$, pak množina vektorů $\mathcal{Q} = \mathbf{s} + \mathbf{W}$ popsaná v posledně uvedeném tvrzení se nazývá **lineární varieta** ve vektorovém prostoru $(T^n, +, \cdot)$. Podotkněme, že pak pro každý vektor $\mathbf{t}$ z množiny $\mathbf{s} + \mathbf{W}$ zjevně platí, že $\mathbf{s} + \mathbf{W} = \mathbf{t} + \mathbf{W}$.

Tvrzení. Buď $(T, +, \cdot)$ těleso. Pak pro libovolnou lineární varietu $\mathcal{Q}$ ve vektorovém prostoru $(T^n, +, \cdot)$ existuje soustava lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$ taková, že množinou všech řešení této soustavy rovnic je právě lineární varieta $\mathcal{Q}$.

Důkaz. Nechť vektor $\mathbf{s}$ z T^n a podprostor $\mathbf{W} \subseteq T^n$ jsou takové, že $\mathcal{Q} = \mathbf{s} + \mathbf{W}$. Podle předminulého tvrzení existuje homogenní soustava lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{o}^\top$, jejíž množinou všech řešení je právě podprostor $\mathbf{W}$. Určeme vektor $\mathbf{b}$ z T^m z rovností $\mathbf{b}^\top = A \cdot \mathbf{s}^\top$. Z minulého tvrzení je pak jasné, že množinou všech řešení soustavy lineárních rovnic $A \cdot \mathbf{x}^\top = \mathbf{b}^\top$ bude právě lineární varieta $\mathcal{Q}$.