Vektorové prostory

Zobecníme nejprve představu vektorů z dvourozměrného nebo trojrozměrného prostoru na libovolný n-rozměrný prostor, kde n je jakékoliv přirozené číslo. Tento n-rozměrný prostor reprezentujeme jako kartézskou mocninu $\mathbb{R}^n$ množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, tedy jako množinu všech n-tic reálných čísel.

Vezmeme-li libovolné dva body $A, B \in \mathbb{R}^n$, tedy dvě n-tice reálných čísel $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$, pak tyto dva body určují vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tak, že $u_1 = b_1 - a_1$, $u_2 = b_2 - a_2$, $\ldots$, $u_n = b_n - a_n$. Pak ovšem můžeme stručně psát $B = A + \mathbf{u}$, chápeme-li tento součet po jednotlivých složkách. Tentýž vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je ovšem určen také kterýmikoliv jinými dvěma body $C, D \in \mathbb{R}^n$, tedy jinými dvěma n-ticemi $C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$, $D = [d_1, d_2, \ldots, d_n]$, pro něž platí $u_1 = d_1 - c_1$, $u_2 = d_2 - c_2$, $\ldots$, $u_n = d_n - c_n$, takže pak lze podobně psát $D = C + \mathbf{u}$. Samotný vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je pak rovněž n-ticí reálných čísel, a je tedy také prvkem kartézské mocniny $\mathbb{R}^n$.

Navíc máme-li tři body $A, B, C \in \mathbb{R}^n$, kde body A, B určují vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tak, že $B = A + \mathbf{u}$, a body B, C určují podobně vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tak, že $C = B + \mathbf{v}$, pak ovšem máme $C = A + \mathbf{u} + \mathbf{v}$, což znamená, že součet vektorů $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\ u_2 + v_2,\ \ldots,\ u_n + v_n)$ je vektor určený body A, C. Kromě toho určuje-li dvojice bodů A, B vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, pak dvojice bodů B, A určuje opačný vektor $-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, \ldots, -u_n)$. Dvojice stejných bodů A, A určuje nulový vektor $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$. Takto je možno kartézskou mocninu $\mathbb{R}^n$ chápat také jako množinu všech vektorů v n-rozměrném prostoru, které spolu s právě popsanou operací $+$ tvoří komutativní grupu $(\mathbb{R}^n, +)$.

Vedle toho máme možnost ještě pro každé číslo $r \in \mathbb{R}$ a pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, uvažovat také vektor $r{\cdot}\mathbf{u} = (r{\cdot}u_1, r{\cdot}u_2, \ldots, r{\cdot}u_n)$. Tímto způsobem zavedená tzv. vnější operace $\cdot$, tj. násobení vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ skalárem $r \in \mathbb{R}$ má některé další příznivé vlastnosti, které jsou popsány níže. Máme-li na zřeteli celou takto vzniklou strukturu, mluvíme o vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel.

Postoupíme-li v procesu zobecňování a abstrakce ještě dále a vezmeme-li místo reálných čísel jakékoliv těleso a místo jeho n-té kartézské mocniny jakoukoliv komutativní grupu, která bude svázána s daným tělesem vnější operací skalárního násobku mající analogické vlastnosti jako doposud, dostaneme následující obecný pojem vektorového prostoru.

Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a buď $(\mathbf{V}, +)$ komutativní grupa. Nechť je dále dáno zobrazení

$$\cdot \;:\; T \times \mathbf{V} \;\to\; \mathbf{V}$$

přiřazující každému prvku $s \in T$ a každému prvku $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ prvek $s{\cdot}\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ takovým způsobem, že pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned}
&s \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s{\cdot}\mathbf{u} + s{\cdot}\mathbf{v},\\
&(s + t) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} + t{\cdot}\mathbf{u},\\
&(s \cdot t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot (t \cdot \mathbf{u}),\\
&1{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{u}.
\end{aligned}$$

Pak trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se nazývá **vektorový prostor nad tělesem** $(T, +, \cdot)$.

Prvky množiny $\mathbf{V}$ se nazývají **vektory** a prvky množiny T se nazývají **skaláry**. Neutrální prvek grupy $(\mathbf{V}, +)$ se značí symbolem $\mathbf{o}$ a nazývá se **nulový vektor**. Opačný prvek k vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ v grupě $(\mathbf{V}, +)$ se značí symbolem $-\mathbf{u}$ a nazývá se **opačný vektor** k vektoru $\mathbf{u}$. Vektor $s{\cdot}\mathbf{u}$, kde $s \in T$ a $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$, se nazývá **skalární násobek** vektoru $\mathbf{u}$ prvkem s.

Symbolem $+$ jsou ve struktuře vektorového prostoru označeny dvě binární operace, totiž sčítání $+ : T \times T \to T$ v tělese $(T, +, \cdot)$ a sčítání $+ : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ v komutativní grupě $(\mathbf{V}, +)$. Podobně symbolem $\cdot$ je označena jednak binární operace násobení $\cdot : T \times T \to T$ v tělese $(T, +, \cdot)$ a také vnější operace skalárního násobku $\cdot : T \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, která je pak uváděna v rámci trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Je třeba mít tuto okolnost na zřeteli, i když nebude moci dojít k nedorozumění, poněvadž z kontextu bude vždy jasné, o kterou operaci právě jde.

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ budeme opět synbolem $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ značit vektor $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. Pak z vlastností operací ve struktuře vektorového prostoru uvedených až doposud plynou jako důsledky také následující vlastnosti.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$\begin{aligned} &s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v}, \\ &(s - t) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u}, \\ &s \cdot (-\mathbf{u}) = (-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u}), \\ &s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff s = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Důkaz. Ježto $(-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{o}$ a $s{\cdot}\mathbf{v} - s{\cdot}\mathbf{v} = s{\cdot}\mathbf{v} + (-s{\cdot}\mathbf{v}) = \mathbf{o}$, dostáváme odtud $s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v})) + s{\cdot}\mathbf{v} - s{\cdot}\mathbf{v} = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) - s{\cdot}\mathbf{v} = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v}$.

Dále poněvadž $(-t) + t = 0$ a $t{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = t{\cdot}\mathbf{u} + (-t{\cdot}\mathbf{u}) = \mathbf{o}$, dostáváme podobně $(s - t) \cdot \mathbf{u} = (s + (-t)) \cdot \mathbf{u} + t{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = (s + (-t) + t) \cdot \mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u}$.

Poněvadž podle předchozího $s{\cdot}\mathbf{u} + s \cdot (-\mathbf{u}) = s \cdot (\mathbf{u} + (-\mathbf{u})) = s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je vektor $s \cdot (-\mathbf{u})$ opačným vektorem k vektoru $s{\cdot}\mathbf{u}$, takže máme $s \cdot (-\mathbf{u}) = -(s{\cdot}\mathbf{u})$. Podobně poněvadž $s{\cdot}\mathbf{u} + (-s) \cdot \mathbf{u} = (s + (-s)) \cdot \mathbf{u} = (s - s) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o}$, je vektor $(-s) \cdot \mathbf{u}$ opačným vektorem k vektoru $s{\cdot}\mathbf{u}$, takže máme také $(-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u})$.

Je-li $s = 0$, pak podle předchozích poznatků máme $0 \cdot \mathbf{u} = (0 - 0) \cdot \mathbf{u} = 0 \cdot \mathbf{u} - 0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$. Je-li $\mathbf{u} = \mathbf{o}$, pak podobně $s \cdot \mathbf{o} = s \cdot (\mathbf{o} - \mathbf{o}) = s \cdot \mathbf{o} - s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$. Je-li naopak $s \cdot \mathbf{u} = \mathbf{o}$ a je-li přitom $s \neq 0$, pak $\mathbf{u} = 1 \cdot \mathbf{u} = (s^{-1} \cdot s) \cdot \mathbf{u} = s^{-1} \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = s^{-1} \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$ podle posledního zjištění, takže pak $\mathbf{u} = \mathbf{o}$.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť n je přirozené číslo. Pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in T\}$ spolu s operací sčítání $+$ definovanou po složkách předpisem $(s_1, s_2, \ldots, s_n) + (t_1, t_2, \ldots, t_n) = (s_1 + t_1,\ s_2 + t_2,\ \ldots,\ s_n + t_n)$ a s vnější operací skalárního násobku $\cdot$ definovanou podobně předpisem $s \cdot (t_1, t_2, \ldots, t_n) = (s \cdot t_1, s \cdot t_2, \ldots, s \cdot t_n)$ tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Speciální případ, kdy tělesem $(T, +, \cdot)$ bylo těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ všech reálných čísel, byl rozebrán v úvodu této kapitoly.

Nechť opět $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť $T[x]$ je množina všech polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$. V kapitole o okruzích polynomů jsme na množině $T[x]$ definovali binární operace $+$ a $\cdot$ tak, že pak $(T[x], +, \cdot)$ byl okruh, nazývaný okruh polynomů nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Zúžíme-li nyní druhou z těchto operací, tedy operaci $\cdot$ tak, že ji ponecháme definovanou pouze pro ty dvojice polynomů $f, g \in T[x]$, kde f je konstantní polynom, a tedy f je vlastně prvkem množiny T, dostaneme tak vnější operaci skalárního násobku přiřazující každému prvku $s \in T$ a každému polynomu $g \in T[x]$ polynom $s \cdot g \in T[x]$. Tak vzniká vektorový prostor $(T[x], +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Uvažme množinu $\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ všech zobrazení intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ do množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Na této množině definujme operaci sčítání $+$ pro libovolná $f, g : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \langle 0, 1 \rangle) \big((f + g)(x) = f(x) + g(x)\big)$$

a dále definujme vnější operaci skalárního násobku $\cdot$ pro libovolná $r \in \mathbb{R}$ a $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \langle 0,1\rangle)\,\big((r\cdot f)(x) = r\cdot f(x)\big).$$

Pak $\left(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle},+,\cdot\right)$ je vektorový prostor nad tělesem $(\mathbb{R},+,\cdot)$ všech reálných čísel.

Buď $(\mathbf{V},+,\cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T,+,\cdot)$. Nechť $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podmnožina splňující následující podmínky:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{o} \in \mathbf{W},\\
&(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbf{W})(\mathbf{u}+\mathbf{v} \in \mathbf{W}),\\
&(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{W})(s{\cdot}\mathbf{u} \in \mathbf{W}).
\end{aligned}$$

Pak říkáme, že $\mathbf{W}$ je **podprostor** vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Tato terminologie je ospravedlněna skutečností, že potom množina $\mathbf{W}$ je uzavřená vzhledem k operaci $+$ sčítání vektorů a také vzhledem ke skalárnímu násobení $\cdot$ vektorů libovolnými prvky tělesa $(T,+,\cdot)$; navíc množina $\mathbf{W}$ obsahuje nulový vektor $\mathbf{o}$ a dále ke každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ obsahuje také opačný vektor $-\mathbf{u}$, poněvadž $-\mathbf{u} = -(1\cdot\mathbf{u}) = (-1)\cdot\mathbf{u} \in \mathbf{W}$. Takže pak $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podgrupa grupy $(\mathbf{V},+)$ a celkem tak vzniká struktura $(\mathbf{W},+,\cdot)$, která je zase vektorovým prostorem nad tělesem $(T,+,\cdot)$, neboť také ostatní shora uvedené definiční podmínky vektorového prostoru zůstávají splněny.

V každém vektorovém prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$ jsou podmnožiny $\{\mathbf{o}\}$ a $\mathbf{V}$ množiny $\mathbf{V}$ podprostory vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Znamená to mimo jiné, že $(\{\mathbf{o}\},+,\cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T,+,\cdot)$, kterému říkáme **nulový vektorový prostor**. Kromě toho ovšem může mít daný vektorový prostor množství dalších podprostorů.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso a nechť m, n jsou přirozená čísla splňující $m < n$. Viděli jsme, že pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in T\}$ spolu s operacemi sčítání $+$ a skalárního násobení $\cdot$ definovanými po složkách tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak množina $T^m \times \{0\}^{n-m} = \{(s_1, s_2, \ldots, s_m, 0, 0, \ldots, 0) \mid s_1, s_2, \ldots, s_m \in T\}$, jež je podmnožinou kartézské mocniny T^n, je podprostorem vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$.

Buď opět $(T, +, \cdot)$ těleso. Viděli jsme, že pak okruh polynomů $(T[x], +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak například množina $\{f \in T[x] \mid (\forall t \in T)(f(t) = f(-t))\}$ tvoří podprostor ve vektorovém prostoru $(T[x], +, \cdot)$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor podprostorů $\mathbf{W}_i$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde $i \in I$, platí, že průnik tohoto souboru podprostorů $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ je také podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důkaz. Ověření faktu, že množina $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ splňuje všechny výše uvedené definiční podmínky vektorového podprostoru, pokud jednotlivé množiny $\mathbf{W}_i$ pro $i \in I$ tyto podmínky splňují, je rutinní záležitostí.

Buď dále $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Buď $M \subseteq \mathbf{V}$ libovolná podmnožina. Pak existuje alespoň jeden podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ obsahující množinu M – například celá množina $\mathbf{V}$ je takovým podprostorem. To znamená, že soubor všech těch podprostorů vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, které obsahují množimu M, je neprázdný. Můžeme tedy utvořit průnik tohoto souboru podprostorů. Podle předchozího tvrzení je tento průnik sám podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Tento poslední podprostor pak značíme symbolem $\langle M \rangle$.

Je jasné, že pak $\langle M\rangle$ je nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ v systému všech podprostorů tohoto vektorového prostoru částečně uspořádaném inkluzí, který obsahuje množinu M. O tomto podprostoru $\langle M\rangle$ říkáme, že je to podprostor **generovaný** množinou M, a o samotné množině M říkáme, že je to množina **generátorů** podprostoru $\langle M\rangle$. Tato terminologie je odůvodněna následující skutečností. Poznamenejme ještě předtím, že pro $M=\emptyset$ zřejmě máme $\langle M\rangle=\{\mathbf{o}\}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V},+,\cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T,+,\cdot)$ a nechť $M\subseteq\mathbf{V}$, $M\neq\emptyset$ je libovolná podmnožina. Pak platí následující rovnost:

$$\langle M\rangle=\{s_1\cdot\mathbf{u}_1+s_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+s_n\cdot\mathbf{u}_n\mid n\in\mathbb{N},\ s_1,s_2,\ldots,s_n\in T,\ \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n\in M\}.$$

Poznámka. O vektoru $s_1\cdot\mathbf{u}_1+s_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+s_n\cdot\mathbf{u}_n$ říkáme, že je to **lineární kombinace** vektorů $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ s koeficienty $s_1,s_2,\ldots,s_n$. Podle uvedeného tvrzení je tedy podprostor $\langle M\rangle$ tvořen všemi lineárními kombinacemi konečných posloupností vektorů z M s koeficienty z T.

Důkaz. Označme množinu uvedenou napravo v dokazované rovnosti jako $\mathbf{U}$. Máme ukázat, že pak $\langle M\rangle=\mathbf{U}$. Podle definice je $\langle M\rangle$ nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$ vzhledem k inkluzi obsahující množinu M. Stačí, když ukážeme, že tytéž podmínky platí také pro množinu $\mathbf{U}$. Pak budeme vědět, že vskutku $\langle M\rangle=\mathbf{U}$.

Nejprve ověříme, že $\mathbf{U}$ je podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V},+,\cdot)$. Ovšem $M\neq\emptyset$, takže můžeme zvolit vektor $\mathbf{u}\in M$ a máme $\mathbf{o}=\mathbf{u}-\mathbf{u}=1\cdot\mathbf{u}+(-1)\cdot\mathbf{u}$, což ukazuje, že $\mathbf{o}\in\mathbf{U}$. Dále pro libovolné dva vektory $s_1\cdot\mathbf{u}_1+s_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+s_n\cdot\mathbf{u}_n$ a $t_1\cdot\mathbf{v}_1+t_2\cdot\mathbf{v}_2+\cdots+t_k\cdot\mathbf{v}_k$ z $\mathbf{U}$, kde $n,k\in\mathbb{N}$, $s_1,s_2,\ldots,s_n$, $t_1,t_2,\ldots,t_k\in T$, $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n,\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\in M$ platí, že také vektor $s_1\cdot\mathbf{u}_1+s_2\cdot\mathbf{u}_2+\cdots+s_n\cdot\mathbf{u}_n+t_1\cdot\mathbf{v}_1+t_2\cdot\mathbf{v}_2+\cdots+t_k\cdot\mathbf{v}_k$

náleží do $\mathbf{U}$. Rovněž pro libovolné $t \in T$ také vektor $t\cdot(s_1\cdot\mathbf{u}_1 + s_2\cdot\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\cdot\mathbf{u}_n) = (t\cdot s_1)\cdot\mathbf{u}_1 + (t\cdot s_2)\cdot\mathbf{u}_2 + \cdots + (t\cdot s_n)\cdot\mathbf{u}_n$ náleží do $\mathbf{U}$. Je tedy $\mathbf{U}$ podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Dále pro každý vektor $\mathbf{u} \in M$ máme $\mathbf{u} = 1\cdot\mathbf{u}$, takže $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Je tedy vidět, že $M \subseteq \mathbf{U}$.

Nakonec ukážeme, že $\mathbf{U}$ je nejmenší podmnožina ve $\mathbf{V}$ s předchozími dvěma vlastnostmi vzhledem k inkluzi, tedy že $\mathbf{U}$ je nejmenší podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ splňující $M \subseteq \mathbf{U}$:

Buď tedy $\mathbf{W}$ libovolný podprostor ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ takový že $M \subseteq \mathbf{W}$. Pak je třeba ukázat, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$. Tedy pro libovolný vektor $s_1\cdot\mathbf{u}_1 + s_2\cdot\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\cdot\mathbf{u}_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in M$, máme ukázat, že $s_1\cdot\mathbf{u}_1 + s_2\cdot\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\cdot\mathbf{u}_n \in \mathbf{W}$. Ovšem z definičních vlastností podprostoru ihned plyne, že podprostor $\mathbf{W}$ je uzavřen vzhledem k tvorbě libovolných lineárních kombinací vektorů s koeficienty z T. Skutečně tedy platí, že $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$.