Racionální lomené funkce

Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Nechť $f, g \in R[x]$ jsou polynomy, přičemž $g \neq 0$. Víme, že pak polyom g má jenom konečný počet kořenů. Označme K_g množinu všech kořenů polynomu g. Pak definujeme zobrazení

$$\Re_{f/g} : \ R - K_g \ \to \ R$$

předpisem

$$(\forall c \in R - K_g)(\, \Re_{f/g}(c) = f(c) \cdot (g(c))^{-1}\,).$$

Zobrazení $\Re_{f/g}$ se nazývá **racionální lomená funkce** určená dvojicí polynomů f, g.

Na množině $R[x] \times (R[x] - \{0\})$ definujeme relaci $\approx$ takto: Pro libovolné polynomy $f, g, s, t \in R[x]$, $g \neq 0$, $t \neq 0$, klademe

$$(f, g) \approx (s, t) \quad \Longleftrightarrow \quad f \cdot t = s \cdot g.$$

Na pravé straně v této definici vystupuje rovnost dvou polynomů z $R[x]$. Podle posledního důsledku z minulé kapitoly je tato rovnost $f \cdot t = s \cdot g$ ekvivalentní rovnosti polynomických funkcí $\wp_{f \cdot t} = \wp_{s \cdot g}$. Důkaz citovaného důsledku je ovšem takový, že úplně stačí požadovat rovnost těchto dvou funkcí pouze na nekonečné množině $R - (K_g \cup K_t)$. Tento požadavek je pak ovšem ekvivalentní rovnosti racionálních lomených funkcí $\Re_{f/g}$ a $\Re_{s/t}$ na množině $R - (K_g \cup K_t)$. Znamená to tedy, že pro libovolné polynomy $f, g, s, t \in R[x]$, $g \neq 0$, $t \neq 0$, máme

$$(f, g) \approx (s, t) \iff (\forall c \in R - (K_g \cup K_t))(\, \Re_{f/g}(c) = \Re_{s/t}(c)).$$

Dále je evidentní, že tato relace $\approx$ je ekvivalence na množině $R[x] \times (R[x] - \{0\})$. Tímto způsobem vzniká faktorová množina $R[x] \times (R[x] - \{0\}) \,/ \approx$. Pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, budeme třídu $[(f, g)]\approx$ této faktorové množiny značit krátce symbolem $\frac{f}{g}$ a budeme mluvit o **zlomku** určeném dvojicí polynomů f, g.

Faktorová množina $R[x] \times (R[x] - \{0\}) / \approx$ je tedy při uvedené terminologii množinou všech zlomků vytvořených z polynomů z $R[x]$. Při uvedeném označení pak původní definice ekvivalence $\approx$ vypadá tak, že pro libovolná $f, g, s, t \in R[x]$, $g \neq 0$, $t \neq 0$, máme

$$\frac{f}{g} = \frac{s}{t} \iff f \cdot t = s \cdot g.$$

Každý zlomek $\frac{f}{g}$ je ovšem možno vyjádřit jednoznačně v následujícím speciálním, tzv. vykráceném tvaru:

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, existují polynomy $s, t \in R[x]$, $t \neq 0$, takové, že $(s, t) = 1$, polynom t je normovaný a platí $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$. Polynomy s, t jsou přitom určeny jednoznačně.

Důkaz. Nechť a je vedoucí koeficient polynomu g. Položme $f' = a^{-1} \cdot f$ a $g' = a^{-1} \cdot g$. Pak polynom g' je normovaný a podle předchozí formule zřejmě platí $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$. Nechť dále $h = (f', g')$. Pak existují polynomy $s, t \in R[x]$ takové, že $f' = h \cdot s$ a $g' = h \cdot t$. Potom znovu z formule předcházející tomuto tvrzení plyne, že $\frac{f'}{g'} = \frac{s}{t}$. Přitom $t \neq 0$ a t je nutně normovaný polynom, jelikož g' i h jsou takové polynomy. Kromě toho $(s, t) = 1$, neboť kdyby tomu tak nebylo, zjevně by neplatilo, že $(f', g') = h$.

Nechť dále $s, s', t, t' \in R[x]$, $t \neq 0$, $t' \neq 0$ jsou takové polynomy, že $(s, t) = 1$ a $(s', t') = 1$, polynomy t, t' jsou normované a platí pro ně $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$ i $\frac{f}{g} = \frac{s'}{t'}$. Pak ovšem $\frac{s}{t} = \frac{s'}{t'}$. Z formule zmiňované výše pak plyne, že $s \cdot t' = s' \cdot t$. Poněvadž $(s, t) = 1$, z této rovnosti na základě důsledku Bezoutovy rovnosti z předminulé kapitoly plyne, že $s \mid s'$ a $t \mid t'$. Poněvadž také $(s', t') = 1$, podobně odtud plyne rovněž, že $s' \mid s$ a $t' \mid t$. Poněvadž polynomy t, t' jsou normované, znamená to, že $t = t'$, odkud vychází též, že $s = s'$.

Dále je možno na faktorové množině $R[x] \times (R[x] - \{0\}) \,/ \approx$ definovat binární operace $+$ a $\cdot$ následovně. Pro libovolná f, g, $u, v \in R[x]$, $g \neq 0$, $v \neq 0$, klademe

$$\frac{f}{g} + \frac{u}{v} = \frac{f \cdot v + g \cdot u}{g \cdot v} \qquad \text{a} \qquad \frac{f}{g} \cdot \frac{u}{v} = \frac{f \cdot u}{g \cdot v}.$$

Je snadné ověřit, že tyto definice jsou korektní v tom smyslu, že výsledný zlomek v žádné z obou operací nezávisí na tom, kterými konkrétními dvojicemi polynomů jsme výchozí dva zlomky reprezentovali. Kromě toho se pak rovněž lehce ověří, že faktorová množina $R[x] \times (R[x] - \{0\}) \,/ \approx$, tedy množina všech výše popsaných zlomků spolu s právě definovanými operacemi $+$ a $\cdot$ tvoří těleso. Mluvíme o **tělese zlomků** nad okruhem $(R[x], +, \cdot)$. Nakonec se snadno nahlédne, že zobrazení přiřazující každému polynomu $h \in R[x]$ zlomek $\frac{h}{1}$ je prostým homomorfismem okruhu polynomů $(R[x], +, \cdot)$ do právě popsaného tělesa zlomků nad tímto okruhem. Je tedy možno takto polynomy chápat jako speciální typ zlomků.

Nechť znovu $f, g \in R[x]$ jsou polynomy, $g \neq 0$. Řekneme, že zlomek $\frac{f}{g}$ je **ryzí**, jestliže $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$. Poznamenejme, že ani tato definice nezávisí na dané konkrétní reprezentci dotyčného zlomku, neboť jsou-li $s, t \in R[x]$, $t \neq 0$ takové polynomy, že $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$, pak máme $f \cdot t = s \cdot g$, a tedy $\mathrm{st}(f) + \mathrm{st}(t) = \mathrm{st}(s) + \mathrm{st}(g)$. Takže $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$ platí právě tehdy, když platí $\mathrm{st}(s) < \mathrm{st}(t)$.

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, existují polynomy $h, u, v \in R[x]$, $v \neq 0$, takové, že $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{v}$, přičemž $\frac{u}{v}$ je ryzí zlomek. Přitom polynom h i ryzí zlomek $\frac{u}{v}$ jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Podle věty o dělení polynomů se zbytkem existují polynomy $h, u \in R[x]$ takové, že $f = g \cdot h + u$, přičemž je splněno $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(g)$. To znamená, že pak $\frac{f}{g} = \frac{g \cdot h + u}{g} = \frac{h}{1} + \frac{u}{g}$, takže $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{g}$, kde $\frac{u}{g}$ je ryzí zlomek.

Nechť dále $h, h', u, u', v, v' \in R[x]$, $v \neq 0$, $v' \neq 0$, jsou takové polynomy, že $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{v}$ i $\frac{f}{g} = h' + \frac{u'}{v'}$, přičemž oba zlomky $\frac{u}{v}$ i $\frac{u'}{v'}$ jsou ryzí. Pak tedy máme $h + \frac{u}{v} = h' + \frac{u'}{v'}$, takže $h - h' = \frac{u'}{v'} - \frac{u}{v}$, a tedy $(h - h')\cdot v\cdot v' = u'\cdot v - u\cdot v'$. Poněvadž ale $\mathrm{st}(u) < \mathrm{st}(v)$ a $\mathrm{st}(u') < \mathrm{st}(v')$, plyne odtud, že $\mathrm{st}(u'\cdot v - u\cdot v') < \mathrm{st}(v\cdot v')$. To ovšem ukazuje, že předchozí rovnost může platit jenom tehdy, je-li $h = h'$. To má pak za následek také rovnost $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'}$.

Tvrzení. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Nechť $f, g, h \in R[x]$, $g \neq 0$, $h \neq 0$ jsou takové polynomy, že $(g, h) = 1$ a $\frac{f}{g\cdot h}$ je ryzí zlomek. Potom existují polynomy $u, v \in R[x]$ takové, že platí $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$, přičemž oba zlomky $\frac{u}{g}$ i $\frac{v}{h}$ jsou ryzí. Navíc tyto polynomy u, v jsou určeny jednoznačně.

Důkaz. Poněvadž $(g, h) = 1$, podle Bezoutovy rovnosti existují polynomy $s, t \in R[x]$ takové, že $1 = h\cdot s + g\cdot t$. Pak ovšem $f = f\cdot 1 = f\cdot h\cdot s + f\cdot g\cdot t$, takže $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{f\cdot h\cdot s + f\cdot g\cdot t}{g\cdot h} = \frac{f\cdot s}{g} + \frac{f\cdot t}{h}$. Podle předchozího tvrzení a jeho důkazu pak ale existují polynomy $p, q, u, v \in R[x]$ takové, že $\frac{f\cdot s}{g} = p + \frac{u}{g}$ a $\frac{f\cdot t}{h} = q + \frac{v}{h}$, přičemž $\frac{u}{g}$ i $\frac{v}{h}$ jsou ryzí zlomky. Takže dostáváme $\frac{f}{g\cdot h} = p + q + \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$. Poněvadž všechny zlomky v této rovnosti jsou ryzí, podobnou argumentací jako v závěru předchozího důkazu odtud odvodíme, že nutně $p + q = 0$. Vychází tedy, že $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$.

Nechť dále $u, u', v, v' \in R[x]$ jsou takové polynomy, že platí $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$ i $\frac{f}{g\cdot h} = \frac{u'}{g} + \frac{v'}{h}$, přičemž všechny zlomky $\frac{u}{g}, \frac{v}{h}, \frac{u'}{g}, \frac{v'}{h}$ jsou ryzí. Pak ovšem $\frac{u}{g} + \frac{v}{h} = \frac{u'}{g} + \frac{v'}{h}$, takže máme $u\cdot h + v\cdot g = u'\cdot h + v'\cdot g$, a tedy $(v - v')\cdot g = (u' - u)\cdot h$. Poněvadž $(g, h) = 1$, podle důsledku Bezoutovy rovnosti z předminulé kapitoly odtud plyne, že $g \,|\, (u' - u)$ a $h \,|\, (v - v')$. Protože ale $\mathrm{st}(u' - u) < \mathrm{st}(g)$ a $\mathrm{st}(v - v') < \mathrm{st}(h)$, je to možné jenom tak, že $u = u'$ a $v = v'$.

Nechť $p \in R[x]$ je ireducibilní polynom, $f \in R[x]$ je nenulový polynom takový, že $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(p)$, a nechť k je přirozené číslo. Položme $g = p^k$. Pak o zlomku $\frac{f}{g}$ říkáme, že je to **prostý** zlomek.

Nyní jsme připraveni formulovat následující větu o rozkladu racionálních lomených funkcí na parciální zlomky.

Věta. Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak libovolný nenulový ryzí zlomek vytvořený z polynomů z R[x] lze vyjádřit ve tvaru součtu konečného počtu prostých zlomků. Přitom toto vyjádření je pro daný ryzí zlomek jediné.

Důkaz. Mějme libovolný ryzí zlomek $\frac{f}{g}$, kde $f, g \in R[x]$ jsou takové polynomy, že $f \neq 0$, $g \neq 0$ a $\mathrm{st}(f) < \mathrm{st}(g)$. Pak g je nekonstantní polynom. Poněvadž okruh polynomů $(R[x], +, \cdot)$ je okruhem s jednoznačným rozkladem, existují konstanta $a \in R$, $a \neq 0$, přirozené číslo ℓ, vzájemně různé normované ireducibilní polynomy $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ z $R[x]$ a přirozená čísla $k_1, k_2, \ldots, k_\ell$ taková, že platí $g = a \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{k_\ell}$. Položme ještě $f' = a^{-1} \cdot f$, $g' = a^{-1} \cdot g$ a dodejme, že potom $\frac{f}{g} = \frac{f'}{g'}$ a $g' = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_\ell^{k_\ell}$. Poznamenejme ještě, že pak pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ je polynom $p_i^{k_i}$ nesoudělný se součinem všech zbývajících polynomů mezi $p_1^{k_1}$, $p_2^{k_2}$, $\ldots$, $p_\ell^{k_\ell}$. Vzhledem k této okolnosti je možno opakovanou aplikací předchozího tvrzení postupně najít polynomy $u_1, u_2, \ldots, u_\ell \in R[x]$ tak, že platí

$$\frac{f}{g} = \frac{u_1}{p_1^{k_1}} + \frac{u_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{u_\ell}{p_\ell^{k_\ell}},$$

přičemž všechny zlomky napravo v této rovnosti jsou ryzími zlomky. Poněvadž $f \neq 0$, existuje alespoň jedno $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, pro něž je $u_i \neq 0$. Vezměme nyní libovolné $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ takové, že $u_i \neq 0$, a zkoumejme zlomek $\frac{u_i}{p_i^{k_i}}$. Označme ho kvůli jednoduchosti jako $\frac{u}{p^k}$. Je-li $k = 1$, je to již prostý zlomek. Předpokládejme tedy dále, že $k > 1$. Pak opakovaným dělením polynomů se zbytkem postupně najdeme polynomy $q_1, q_2, \ldots, q_{k-1} \in R[x]$ a $r_1, r_2, \ldots, r_{k-1} \in R[x]$ takové, že platí:

$$
\begin{aligned}
u &= p{\cdot}q_1 + r_1, \quad \operatorname{st}(r_1) < \operatorname{st}(p),\\
q_1 &= p{\cdot}q_2 + r_2, \quad \operatorname{st}(r_2) < \operatorname{st}(p),\\
q_2 &= p{\cdot}q_3 + r_3, \quad \operatorname{st}(r_3) < \operatorname{st}(p),\\
&\dots\\
q_{k-2} &= p{\cdot}q_{k-1} + r_{k-1}, \quad \operatorname{st}(r_{k-1}) < \operatorname{st}(p).
\end{aligned}
$$

Poněvadž $\operatorname{st}(u) < \operatorname{st}(p^k)$, vychází odtud postupně také, že $\operatorname{st}(q_1) < \operatorname{st}(p^{k-1})$, $\operatorname{st}(q_2) < \operatorname{st}(p^{k-2})$, $\operatorname{st}(q_3) < \operatorname{st}(p^{k-3})$, $\dots$, $\operatorname{st}(q_{k-1}) < \operatorname{st}(p)$. Z předchozích rovností rovněž dále plyne, že $u = r_1 + p{\cdot}r_2 + p^2{\cdot}r_3 + \dots + p^{k-2}{\cdot}r_{k-1} + p^{k-1}{\cdot}q_{k-1}$. Přitom $u \neq 0$. To znamená, že dostáváme

$$
\frac{u}{p^k} = \frac{r_1}{p^k} + \frac{r_2}{p^{k-1}} + \frac{r_3}{p^{k-2}} + \dots + \frac{r_{k-1}}{p^2} + \frac{q_{k-1}}{p},
$$

přičemž všechny ty zlomky uvedené vpravo v této rovnosti, které jsou nenulové, jsou prostými zlomky. Tento fakt spolu s předchozím rozkladem ryzího zlomku $\frac{f}{g}$ dokazují existenci požadovaného vyjádření zlomku $\frac{f}{g}$ ve tvaru součtu několika prostých zlomků. Jednoznačnost tohoto vyjádření se dokáže argumenty podobnými těm, které byly použity v důkazech předchozích dvou tvrzení.

Poznámky. Před rozkladem daného ryzího zlomku $\frac{f}{g}$ na součet prostých zlomků je rozumné vyjádřit tento zlomek ve vykráceném tvaru podle prvního tvrzení této kapitoly.

Požadujeme-li, aby zde prosté zlomky byly vyjádřeny v takovém tvaru, který byl dán v jejich definici, a chceme-li navíc, aby přitom ireducibilní polynomy v těchto tvarech byly normované, pak dostáváme jednoznačnost rozkladu ryzího zlomku $\frac{f}{g}$ na součet prostých zlomků netoliko, pokud jde o vlastní prosté zlomky v tomto rozkladu obsažené, ale dokonce, pokud se týče samotných polynomů použitých ve vyjádřeních těchto zlomků.