Řešení systémů lineárních rovnic

Ondřej Klíma

Opakování

- Konečněrozměrný vektorový prostor — báze, dimenze.
- Souřadnice — konečněrozměrný vektorový prostor nad T dimenze n je izomorfní T^n.
- Hodnost matice — „sloupcová $=$ řádková“.
- Výpočet hodnosti — EŘÚ.
- Pro hodnost (matice A typu $m \times n$) platí

$$h(A) \leq \min\{m, n\}.$$

Plná hodnost čtvercových matic

Kdy má čtvercová matice $n \times n$ hodnost n?

Věta.
Pro každou čtvercovou matici $A = (a_{ij})$ řádu n nad tělesem T jsou následující podmínky ekvivalentní:

- Hodnost matice A je rovna n.
- Řádky matice A jsou lineárně nezávislé.
- Sloupce matice A jsou lineárně nezávislé.
- Determinant $|A|$ je nenulový.
- Matice A je invertibilní.

Regulární matice

- Čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu n nad tělesem T, která splňuje ekvivalentní podmínky z předchozí věty, se nazývá **regulární matice**.
- Nesplňuje-li taková čtvercová matice A podmínky z předchozí věty, říkáme, že je to **singulární matice**.
- Příklad: matice přechodu jsou regulární.
- Pozn: Regulární matice řádu n tvoří grupu vzhledem k násobení matic.

Řešení homogenních systémů

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 \; + \cdots + \; a_{1n}x_n \; &= \; 0, \\ a_{21}x_1 \; + \; a_{22}x_2 \; + \cdots + \; a_{2n}x_n \; &= \; 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \; &= \; 0, \end{aligned}$$

$A \cdot x^\top = \mathbf{o}$

Pro libovolnou matici A typu $m \times n$ nad T je množina

$$S_A = \{x \in T^n \mid A \cdot x^\top = \mathbf{o}\}$$

všech řešení homogenní soustavy $A \cdot x^\top = \mathbf{o}$ podprostor T^n.

Řešení $A \cdot x^\top = \mathbf{o}$ jako podprostor

$S_A = \{x \in T^n \mid A \cdot x^\top = \mathbf{o}\}$ je podprostor T^n.

- $\mathbf{o} \in S_A$,
- $x, y \in S_A \implies x + y \in S_A$

  $A(x^\top + y^\top) = Ax^\top + Ay^\top = \mathbf{o} + \mathbf{o} = \mathbf{o}$
- $s \in T, x \in S_A \implies s \cdot x \in S_A$

  $A \cdot (s \cdot x^\top) = A \cdot s \cdot x^\top = s \cdot A \cdot x^\top = s \cdot \mathbf{o} = \mathbf{o}$

Pozor: $\mathbf{o}$ značí někde nulový vektor v T^n a jinde nulový vektor v T^m.

Podprostor řešení — dimenze

V případě čtvercových matic (tj. $m = n$):

- $|A| \neq 0 \implies S_A = \{\mathbf{o}\}$, (dimenze 0)
- $|A| = 0 \implies S_A$ „nekonečná“ (pro T nekonečná),
- Jaká je dimenze S_A? Najít bázi ...

Věta.
Množina všech řešení homogenní soustavy m lineárních rovnic o n neznámých s maticí koeficientů $A = (a_{ij})$ nad tělesem T tvoří vektorový prostor dimenze $k = n - \mathrm{h}(A)$, kde $\mathrm{h}(A)$ je hodnost matice A.

Od podprostoru k soustavě

Je každý podprostor řešením nějaké soustavy?

Buď $\mathbf{V}$ podprostor T^n. Pak množina

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in T^n \mid \forall x \in \mathbf{V} : \mathbf{a} \cdot x^\top = 0\}$$

je vektorový podprostor v T^n, přičemž $dim\mathbf{V} + dim\mathbf{U} = n$.

Věta.
Pro libovolný podprostor $\mathbf{V}$ vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ dimenze $k \leq n$, existuje homogenní soustava lineárních rovnic o n neznámých nad tělesem $(T, +, \cdot)$ s maticí koeficientů $A = (a_{ij})$ hodnosti $\mathrm{h}(A) = n - k$, jejíž všechna řešení tvoří právě podprostor $\mathbf{V}$.

Řešení nehomogenních systémů

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

$A \cdot x^\top = \mathbf{b}$

Pro matici A a vektor $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ množina

$$S_{A,b} = \{x \in T^n \mid A \cdot x^\top = \mathbf{b}\}$$

všech řešení nehomogenní soustavy $A \cdot x^\top = \mathbf{b}$ není podprostor T^n. ($\mathbf{o} \notin S_{A,b}$)

Vlastnosti řešení $A \cdot x^\top = \mathbf{b}$

Stále platí $A(x^\top + y^\top) = Ax^\top + Ay^\top$. Proto platí:

- $x \in S_{A,b}, y \in S_A \implies x + y \in S_{A,b}$
- $x, y \in S_{A,b} \implies x - y \in S_A$

Věta.
Je-li $z \in S_{A,b}$ nějaké řešení soustavy $A \cdot x^\top = \mathbf{b}$, pak

$$S_{A,b} = \{z + y \mid y \in S_A\}.$$

Poslední vyjádření píšeme ve tvaru: $S_{A,b} = z + S_A$.
Terminologie: $A \cdot x^\top = \mathbf{o}$ **zhomogenizovaná soustava**,
z **partikulární řešení**,
nějaká báze S_A **fundamentální systém řešení**.

Vyjádření řešení jako $z + \mathbf{V}$

- Vyjádření $S_{A,b}$ jako $z + \mathbf{V}$ není jednoznačné.

  Lze volit různé partikulární řešení z.
  Podprostor $\mathbf{V}$ je jednoznačně určen, lze v něm však volit různé báze . . . fundamentální systém řešení.
- Opět lze k libovolné množině $z + \mathbf{V}$ najít vhodný systém $A \cdot x^\top = \mathbf{b}$ s vlastností $S_{A,b} = z + \mathbf{V}$.
- Množiny tvaru $z + \mathbf{V}$ se nazývají: afinní podprostory, lineární variety, . . . $\mathbf{V}$ se pak nazývá zaměření.

  Geometrická představa — body, přímky, roviny, . . .
- Zbývá otázka, kdy existuje nějaké partikulární řešení z nehomogenního systému.

Frobeniova věta

Věta.
Buď T těleso, buď $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ nad T a buď $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ vektor z T^m. Potom soustava lineárních rovnic $A \cdot x^\top = \mathbf{b}^\top$ je řešitelná právě tehdy, když hodnost matice soustavy, tj. hodnost matice A, je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy, tj. hodnosti matice $(A|\mathbf{b}^\top)$.