Lineární zobrazení

Ondřej Klíma

Příklady zobrazení mezi prostory

- Je-li A matice typu $m \times n$, pak násobení touto maticí, lze vidět jako zobrazení $f : T^n \to T^m$, $f(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u}$ (vektory píšeme sloupcově).
- Osová souměrnost v $\mathbb{R}^2$ (např. podle osy x, „prohození souřadnic“, …).
  Předpis: $f(x, y) = (x, -y)$ ($f(x, y) = (y, x)$) lze psát i maticově …
- Projekce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x, y)$.

Co chceme aby taková přirozená zobrazení splňovala?

Lineární zobrazení — definice

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou dva vektorové prostory nad týmž tělesem T. Nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je zobrazení splňující následující podmínky:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V})(f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})),$$

$$(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})(f(s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot f(\mathbf{u})).$$

Pak f se nazývá **lineární zobrazení** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.

Především je f homomorfismus grup a platí tedy:

$$f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})(f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})).$$

Lineární zobrazení — příklady

- Násobení maticí: $A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{u} + A \cdot \mathbf{v}$, $A \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot A \cdot \mathbf{u}$.
- Souměrnosti, projekce — ano, co obecně? $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f((x, y)) = x^2 + y^2$ není lineární zobrazení. (Další příklady $f((x, y, z)) = (x + 1, y, y)$, $f((x, y)) = xy$, $\ldots$)
- Pro matici A je zobrazení $f : Mat_{2,2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(X) = A \cdot X$ lineární.
- zobrazení $f : Mat_{2,2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2,2}(\mathbb{R})$, $f(X) = |X|$ není lineární.
- Derivace polynomů: $\phi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$, $\phi(f) = f'$, tj.
$$\phi(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + 2 a_2 x + a_1.$$

Izomorfismus vektorových prostorů

Je-li lineární zobrazení f vektorových prostorů $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ současně bijekcí množiny $\mathbf{V}$ na množinu $\mathbf{W}$, pak říkáme, že f je **izomorfismus** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ na vektorový prostor $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.

Nechť α je báze n-dimenzionálního prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem T. Pak zobrazení $\phi : V \to T^n$, které vektoru přiřadí jeho souřadnice v bázi α je izomorfismus vektorových prostorů.

Pro $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)_\alpha$ a $\mathbf{u} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)_\alpha$ máme $\phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \ldots, s_n + t_n)_\alpha = \phi(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{u})$.

Pro $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)_\alpha$ a $t \in T$ máme $\phi(t \cdot \mathbf{v}) = (t \cdot s_1, t \cdot s_2, \ldots, t \cdot s_n)_\alpha = t \cdot \phi(\mathbf{v})$.

Základní vlastnosti a pojmy

- složení dvou lineárních zobrazení je lineární zobrazení
- inverzní zobrazení k izomorfismu vektorových prostorů je izomorfismus.

Nechť $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ jsou vektorové prostory nad týmž tělesem a f je lineární zobrazení. Pro libovolnou podmnožinu $M \subseteq \mathbf{V}$ klademe $f(M) = \{f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in M\}$.

Speciálně $f(\mathbf{V})$ nazýváme **obraz** lineárního zobrazení. (Značí se též $Im(f)$.)

Dále množina vektorů $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{V} \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}$ se nazývá **jádro** lineárního zobrazení f.

Jádro a obraz lineárního zobrazení

Věta.
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem T a nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení těchto vektorových prostorů. Pak:

- Jádro $\mathrm{Ker}(f)$ tohoto lineárního zobrazení f je podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.
- Zobrazení f je prosté právě tehdy, když $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{o}\}$.
- Pro každý podprostor $\mathbf{U}$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je $f(\mathbf{U})$ podprostor ve vektorovém prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.
- $Im(f) = f(\mathbf{V})$ je podprostor $(\mathbf{W}, +, \cdot)$.

Je-li navíc $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ n-dimenzionální vektorový prostor, potom $dim(\mathrm{Ker}(f)) + dim(Im(f)) = n$.

Jednozačné určení pomocí báze

Věta.
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou vektorové prostory nad tělesem T konečných dimenzí. Nechť dále vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ tvoří bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak pro každou volbu vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathbf{W}$ existuje jediné lineární zobrazení $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ těchto vektorových prostorů takové, že $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{z}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{z}_2$, . . . , $f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{z}_n$.

Pozn: věta platí i v případě, kdy $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ nemá konečnou dimenzi.

Matice lineárních zobrazení

Nechť $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$; $\beta = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m)$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{W}$; a $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení.

Nechť pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jsou souřadnice vektoru $f(\mathbf{v}_j)$ v bázi β rovny $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})_\beta$.

Pak matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$ nad T se nazývá **matice lineárního zobrazení** f **v bázích** α a β. (od α k β.)
Pro $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)_\alpha$, $f(\mathbf{v}) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)_\beta$ platí

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení — poznámky

Důležitý příklad:
Matice přechodu od báze α k bázi β je matice lineárního zobrazení (a totiž identity) prostoru do sebe v bázi α a β.

Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi všemi lineárními zobrazeními z $\mathbf{V}$ do $\mathbf{W}$ a matice příslušného typu.

V této korespondenci skládání zobrazení odpovídá násobení matic.

Standardní příklad

Pro lineární zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určené vztahy $f((1,1,1)) = (1,2,3)$, $f((1,1,0)) = (1,0,-1)$, $f((0,1,1)) = (1,1,1)$ dejte matici tohoto zobrazení v kanonické bázi.

$$
{}_{\epsilon}F_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad {}_{\epsilon}P_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

${}_{\epsilon}F_{\epsilon} = {}_{\epsilon}F_{\alpha} \cdot {}_{\alpha}P_{\epsilon} = {}_{\epsilon}F_{\alpha} \cdot ({}_{\epsilon}P_{\alpha})^{-1}$

$$
{}_{\epsilon}F_{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}
$$

Změna báze

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ jsou nenulové prostory konečných dimenzí nad tělesem T;

nechť α a β jsou dvě báze prostoru $\mathbf{V}$;
a γ a δ jsou dvě báze prostoru $\mathbf{W}$;

nechť ${}_{\beta}P_{\alpha}$ je matice přechodu od báze α k bázi β;
a ${}_{\delta}P_{\gamma}$ je matice přechodu od báze γ k bázi δ;

nechť $f : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ je lineární zobrazení mezi uvedenými prostory a ${}_{\gamma}F_{\beta}$ je matice zobrazení f v bázích β a γ.

Pak matice ${}_{\delta}F_{\alpha}$ zobrazení f v bázích α a δ je rovna

$$
{}_{\delta}F_{\alpha} = {}_{\delta}P_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}F_{\beta} \cdot {}_{\beta}P_{\alpha}.
$$