

---

# Lineární zobrazení

Ondřej Klíma

# Příklady zobrazení mezi prostory

---

- Je-li  $A$  matice typu  $m \times n$ , pak násobení touto maticí, lze vidět jako zobrazení  $f : T^n \rightarrow T^m$ ,  $f(\mathbf{u}) = A \cdot \mathbf{u}$  (vektory píšeme sloupcově).
- Osová souměrnost v  $\mathbb{R}^2$  (např. podle osy  $x$ , „prohození souřadnic“, ...).  
Předpis:  $f(x, y) = (x, -y)$  ( $f(x, y) = (y, x)$ ) lze psát i maticově ...
- Projekce  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y, z) = (x, y)$ .

Co chceme aby taková přirozená zobrazení splňovala?

# Lineární zobrazení — definice

---

Nechť  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  a  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$  jsou dva vektorové prostory nad tímž tělesem  $T$ . Nechť  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  je zobrazení splňující následující podmínky:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V})(f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})),$$

$$(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})(f(s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot f(\mathbf{u})).$$

Pak  $f$  se nazývá **lineární zobrazení** vektorového prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  do vektorového prostoru  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ .

Především je  $f$  homomorfismus grup a platí tedy:

$$f(\mathbf{o}) = \mathbf{o} \quad \text{a} \quad (\forall \mathbf{u} \in \mathbf{V})(f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})).$$

# Lineární zobrazení — příklady

- Násobení maticí:  $A \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A \cdot \mathbf{u} + A \cdot \mathbf{v}$ ,  
 $A \cdot (s \cdot \mathbf{u}) = s \cdot A \cdot \mathbf{u}$ .
- Souměrnosti, projekce — ano, co obecně?  
 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f((x, y)) = x^2 + y^2$  není lineární zobrazení.  
(Další příklady  $f((x, y, z)) = (x + 1, y, y)$ ,  $f((x, y)) = xy$ ,  
...)
- Pro matici  $A$  je zobrazení  $f : Mat_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  
 $f(X) = A \cdot X$  lineární.
- zobrazení  $f : Mat_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow Mat_{2,2}(\mathbb{R})$ ,  $f(X) = |X|$  není lineární.
- Derivace polynomů:  $\phi : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[x]$ ,  $\phi(f) = f'$ , tj.  
 $\phi(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) =$   
 $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2a_2 x + a_1$ .

# Izomorfismus vektorových prostorů

---

Je-li lineární zobrazení  $f$  vektorových prostorů  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  a  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$  současně bijekcí množiny  $\mathbf{V}$  na množinu  $\mathbf{W}$ , pak říkáme, že  $f$  je **izomorfismus** vektorového prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  na vektorový prostor  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ .

Nechť  $\alpha$  je báze  $n$ -dimenzionálního prostoru  $\mathbf{V}$  nad tělesem  $T$ . Pak zobrazení  $\phi : V \rightarrow T^n$ , které vektoru přiřadí jeho souřadnice v bázi  $\alpha$  je izomorfismus vektorových prostorů.

Pro  $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_n)_\alpha$  a  $\mathbf{u} = (t_1, t_2, \dots, t_n)_\alpha$  máme  
$$\phi(\mathbf{v} + \mathbf{u}) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n)_\alpha = \phi(\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{u}).$$

Pro  $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_n)_\alpha$  a  $t \in T$  máme  
$$\phi(t \cdot \mathbf{v}) = (t \cdot s_1, t \cdot s_2, \dots, t \cdot s_n)_\alpha = t \cdot \phi(\mathbf{v}).$$

# Základní vlastnosti a pojmy

---

- složení dvou lineárních zobrazení je lineární zobrazení
- inverzní zobrazení k izomorfismu vektorových prostorů je izomorfismus.

Nechť  $V$ ,  $W$  jsou vektorové prostory nad týmž tělesem a  $f$  je lineární zobrazení. Pro libovolnou podmnožinu  $M \subseteq V$  klademe  $f(M) = \{f(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in M\}$ .

Speciálně  $f(V)$  nazýváme **obraz** lineárního zobrazení. (Značí se též  $Im(f)$ .)

Dále množina vektorů  $Ker(f) = \{\mathbf{u} \in V \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{o}\}$  se nazývá **jádro** lineárního zobrazení  $f$ .

# Jádro a obraz lineárního zobrazení

---

## Věta.

Nechť  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  a  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $T$  a nechť  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  je lineární zobrazení těchto vektorových prostorů. Pak:

- Jádro  $\text{Ker}(f)$  tohoto lineárního zobrazení  $f$  je podprostor vektorového prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ .
- Zobrazení  $f$  je prosté právě tehdy, když  $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{o}\}$ .
- Pro každý podprostor  $\mathbf{U}$  vektorového prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  je  $f(\mathbf{U})$  podprostor ve vektorovém prostoru  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ .
- $\text{Im}(f) = f(\mathbf{V})$  je podprostor  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ .

Je-li navíc  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$   $n$ -dimenzionální vektorový prostor, potom  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$ .

# Jednozačné určeni pomocí báze

---

## Věta.

Nechť  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  a  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$  jsou vektorové prostory nad tělesem  $T$  konečných dimenzí. Nechť dále vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  tvoří bázi prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ . Pak pro každou volbu vektorů  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n \in \mathbf{W}$  existuje jediné lineární zobrazení  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  těchto vektorových prostorů takové, že  $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{z}_1, f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{z}_2, \dots, f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{z}_n$ .

Pozn: věta platí i v případě, kdy  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$  nemá konečnou dimenzi.



# Matice lineárních zobrazení

---

Nechť  $\alpha = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$  je báze vektorového prostoru  $V$ ;  
 $\beta = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_m)$  je báze vektorového prostoru  $W$ ;  
a  $f : V \rightarrow W$  je lineární zobrazení.

Nechť pro každé  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  jsou souřadnice vektoru  $f(\mathbf{v}_j)$  v bázi  $\beta$  rovny  $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})_\beta$ .

Pak matice  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  nad  $T$  se nazývá **matice lineárního zobrazení  $f$  v bázích  $\alpha$  a  $\beta$** . (od  $\alpha$  k  $\beta$ .)

Pro  $\mathbf{v} \in V$ ,  $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_\alpha$ ,  $f(\mathbf{v}) = (y_1, y_2, \dots, y_m)_\beta$  platí

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

# Matice zobrazení — poznámky

---

Důležitý příklad:

Matice přechodu od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$  je matice lineárního zobrazení (a totiž identity) prostoru do sebe v bázi  $\alpha$  a  $\beta$ .

Existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi všemi lineárními zobrazeními z  $V$  do  $W$  a matice příslušného typu.

V této korespondenci skládání zobrazení odpovídá násobení matic.

# Standardní příklad

---

Pro lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  určené vztahy  
 $f((1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$ ,  $f((1, 1, 0)) = (1, 0, -1)$ ,  
 $f((0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$  dejte matici tohoto zobrazení v  
kanonické bázi.

# Standardní příklad

---

Pro lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  určené vztahy  
 $f((1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$ ,  $f((1, 1, 0)) = (1, 0, -1)$ ,  
 $f((0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$  dejte matici tohoto zobrazení v  
kanonické bázi.

$${}_{\epsilon}F_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_{\epsilon}P_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{\epsilon}F_{\epsilon} = {}_{\epsilon}F_{\alpha} \cdot {}_{\alpha}P_{\epsilon} = {}_{\epsilon}F_{\alpha} \cdot ({}_{\epsilon}P_{\alpha})^{-1}$$

# Standardní příklad

---

Pro lineární zobrazení  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  určené vztahy  
 $f((1, 1, 1)) = (1, 2, 3)$ ,  $f((1, 1, 0)) = (1, 0, -1)$ ,  
 $f((0, 1, 1)) = (1, 1, 1)$  dejte matici tohoto zobrazení v  
kanonické bázi.

$${}_{\epsilon}F_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_{\epsilon}P_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}_{\epsilon}F_{\epsilon} = {}_{\epsilon}F_{\alpha} \cdot {}_{\alpha}P_{\epsilon} = {}_{\epsilon}F_{\alpha} \cdot ({}_{\epsilon}P_{\alpha})^{-1}$$

$${}_{\epsilon}F_{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

# Změna báze

---

Nechť  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  a  $(\mathbf{W}, +, \cdot)$  jsou nenulové prostory konečných dimenzí nad tělesem  $T$ ;

nechť  $\alpha$  a  $\beta$  jsou dvě báze prostoru  $\mathbf{V}$ ;

a  $\gamma$  a  $\delta$  jsou dvě báze prostoru  $\mathbf{W}$ ;

nechť  ${}_{\beta}P_{\alpha}$  je matice přechodu od báze  $\alpha$  k bázi  $\beta$ ;

a  ${}_{\delta}P_{\gamma}$  je matice přechodu od báze  $\gamma$  k bázi  $\delta$ ;

nechť  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$  je lineární zobrazení mezi uvedenými prostory a  ${}_{\gamma}F_{\beta}$  je matice zobrazení  $f$  v bázích  $\beta$  a  $\gamma$ .

Pak matice  ${}_{\delta}F_{\alpha}$  zobrazení  $f$  v bázích  $\alpha$  a  $\delta$  je rovna

$${}_{\delta}F_{\alpha} = {}_{\delta}P_{\gamma} \cdot {}_{\gamma}F_{\beta} \cdot {}_{\beta}P_{\alpha}.$$