

Racionální lomené funkce

Ondřej Klíma

Racionální lomené funkce – p.1/7

$R[x]$ — opakování

- $(R[x], +, \cdot)$ — okruh
- $\text{st}(f + g) \leq \max\{\text{st}(f), \text{st}(g)\}$
- $\text{st}(f \cdot g) \leq \text{st}(f) + \text{st}(g)$
- R obor integrity, pak $\text{st}(f \cdot g) = \text{st}(f) + \text{st}(g)$
- R obor integrity, pak $(R[x], +, \cdot)$ obor integrity
- Lze konstruovat podílové těleso

Racionální lomené funkce – p.2/7

R těleso

- jednoznačné dělení se zbytkem
- n.s.d, Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost
- $R[x]$ okruh s jednoznačným rozkladem

Ireducibilní polynomy

- \mathbb{C} : lineární
- \mathbb{R} : lineární a některé kvadratické
- \mathbb{Q} : libovolné stupně

Lemma 1

Lemma.

Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, existují polynomy $s, t \in R[x]$, $t \neq 0$, takové, že $(s, t) = 1$, polynom t je normovaný a platí $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$. Polynomy s, t jsou přitom určeny jednoznačně.

Lemma 2

Nechť $f, g \in R[x]$ jsou polynomy, $g \neq 0$. Řekneme, že zlomek $\frac{f}{g}$ je **ryzí**, jestliže $\text{st}(f) < \text{st}(g)$.

Lemma.

Bud' $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy $f, g \in R[x]$, $g \neq 0$, existují polynomy $h, u, v \in R[x]$, $v \neq 0$, takové, že $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{v}$, přičemž $\frac{u}{v}$ je ryzí zlomek. Přitom polynom h i ryzí zlomek $\frac{u}{v}$ jsou určeny jednoznačně.

Lemma 3

Lemma.

Bud' $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Nechť $f, g, h \in R[x]$, $g \neq 0$, $h \neq 0$ jsou takové polynomy, že $(g, h) = 1$ a $\frac{f}{g \cdot h}$ je ryzí zlomek. Potom existují polynomy $u, v \in R[x]$ takové, že $\frac{f}{g \cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$, přičemž oba zlomky $\frac{u}{g}$ i $\frac{v}{h}$ jsou ryzí. Navíc polynomy u, v jsou určeny jednoznačně.

Nechť $p \in R[x]$ je ireducibilní polynom, nechť $f \in R[x]$ je polynom takový, že $\text{st}(f) < \text{st}(p)$ a nechť k je přirozené číslo. Položme $g = p^k$. Pak o zlomku $\frac{f}{g}$ říkáme, že je to **prostý zlomek**.

Věta.

Buď $(R, +, \cdot)$ nekonečné těleso. Pak libovolný nenulový ryzí zlomek vytvořený z polynomů z $R[x]$ lze vyjádřit ve tvaru součtu konečného počtu prostých zlomků. Přitom toto vyjádření je pro daný ryzí zlomek jediné.