

---

# Racionální lomené funkce

Ondřej Klíma

# $R[x]$ — opakování

---

- $(R[x], +, \cdot)$  — okruh
- $\text{st}(f + g) \leq \max\{\text{st}(f), \text{st}(g)\}$
- $\text{st}(f \cdot g) \leq \text{st}(f) + \text{st}(g)$
- $R$  obor integrity, pak  $\text{st}(f \cdot g) = \text{st}(f) + \text{st}(g)$
- $R$  obor integrity, pak  $(R[x], +, \cdot)$  obor integrity
- Lze konstruovat podílové těleso

# Polynomy nad tělesem

---

$R$  těleso

- jednoznačné dělení se zbytkem
- n.s.d, Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost
- $R[x]$  okruh s jednoznačným rozkladem

# Polynomy nad tělesem

---

$R$  těleso

- jednoznačné dělení se zbytkem
- n.s.d, Euklidův algoritmus, Bezoutova rovnost
- $R[x]$  okruh s jednoznačným rozkladem

Irreducibilní polynomy

- $\mathbb{C}$  : lineární
- $\mathbb{R}$  : lineární a některé kvadratické
- $\mathbb{Q}$  : libovolná stupně

# Lemma 1

---

## Lemma.

Bud'  $(R, +, \cdot)$  nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy  $f, g \in R[x]$ ,  $g \neq 0$ , existují polynomy  $s, t \in R[x]$ ,  $t \neq 0$ , takové, že  $(s, t) = 1$ , polynom  $t$  je normovaný a platí  $\frac{f}{g} = \frac{s}{t}$ . Polynomy  $s, t$  jsou přitom určeny jednoznačně.

# Lemma 2

---

Nechť  $f, g \in R[x]$  jsou polynomy,  $g \neq 0$ . Řekneme, že zlomek  $\frac{f}{g}$  je **ryzí**, jestliže  $\text{st}(f) < \text{st}(g)$ .

# Lemma 2

---

Nechť  $f, g \in R[x]$  jsou polynomy,  $g \neq 0$ . Řekneme, že zlomek  $\frac{f}{g}$  je **ryzí**, jestliže  $\text{st}(f) < \text{st}(g)$ .

## **Lemma.**

Bud'  $(R, +, \cdot)$  nekonečné těleso. Pak pro libovolné polynomy  $f, g \in R[x]$ ,  $g \neq 0$ , existují polynomy  $h, u, v \in R[x]$ ,  $v \neq 0$ , takové, že  $\frac{f}{g} = h + \frac{u}{v}$ , přičemž  $\frac{u}{v}$  je ryzí zlomek. Přitom polynom  $h$  i ryzí zlomek  $\frac{u}{v}$  jsou určeny jednoznačně.

# Lemma 3

---

## Lemma.

Bud'  $(R, +, \cdot)$  nekonečné těleso. Necht'  $f, g, h \in R[x]$ ,  $g \neq 0$ ,  $h \neq 0$  jsou takové polynomy, že  $(g, h) = 1$  a  $\frac{f}{g \cdot h}$  je ryzí zlomek. Potom existují polynomy  $u, v \in R[x]$  takové, že  $\frac{f}{g \cdot h} = \frac{u}{g} + \frac{v}{h}$ , přičemž oba zlomky  $\frac{u}{g}$  i  $\frac{v}{h}$  jsou ryzí. Navíc polynomy  $u, v$  jsou určeny jednoznačně.



# Rozklad na parciální zlomky

---

Nechť  $p \in R[x]$  je ireducibilní polynom, necht'  $f \in R[x]$  je polynom takový, že  $\text{st}(f) < \text{st}(p)$  a necht'  $k$  je přirozené číslo. Položme  $g = p^k$ . Pak o zlomku  $\frac{f}{g}$  říkáme, že je to **prostý zlomek**.

# Rozklad na parciální zlomky

---

Nechť  $p \in R[x]$  je ireducibilní polynom, nechť  $f \in R[x]$  je polynom takový, že  $\text{st}(f) < \text{st}(p)$  a nechť  $k$  je přirozené číslo. Položme  $g = p^k$ . Pak o zlomku  $\frac{f}{g}$  říkáme, že je to **prostý zlomek**.

## **Věta.**

Bud'  $(R, +, \cdot)$  nekonečné těleso. Pak libovolný nenulový ryzí zlomek vytvořený z polynomů z  $R[x]$  lze vyjádřit ve tvaru součtu konečného počtu prostých zlomků. Přitom toto vyjádření je pro daný ryzí zlomek jediné.