

---

# Systemy rovnic a matice

Ondřej Klíma

# Systemy lineárních rovnic

---

$$2x + 3y + 5z = 0$$

$$x + 2y - z = 4$$

$$y + 2z = -1$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

# Elementární řádkové úpravy

---

Eliminace:

- Násobení rovnice nenulovou konstantou.
- Výměna dvou rovnic.
- Přičtení násobku jedné rovnice ke druhé.

# Elementární řádkové úpravy

---

Eliminace:

- Násobení rovnice nenulovou konstantou.
- Výměna dvou rovnic.
- Přičtení násobku jedné rovnice ke druhé.

Elementární řádkové úpravy:

- Násobení řádku nenulovou konstantou.
- Výměna dvou řádků.
- Přičtení násobku jednoho řádku k druhému.

# Elementární řádkové úpravy

---

Eliminace:

- Násobení rovnice nenulovou konstantou.
- Výměna dvou rovnic.
- Přičtení násobku jedné rovnice ke druhé.

Elementární řádkové úpravy:

- Násobení řádku nenulovou konstantou.
- Výměna dvou řádků.
- Přičtení násobku jednoho řádku k druhému.

Eřú jsou „ekvivalentní“ — rovnice nad tělesy.

# Schodovitý tvar matice

---

Matice je v (řádkově) **schodovitém** tvaru jestliže:

- První nenulový prvek v každém řádku (pokud existuje) je 1; tzv. **vedoucí jednička**.
- Nulové řádky jsou dole.
- Ve dvou následujících nenulových řádcích je vedoucí jednička spodního řádku napravo od vedoucí jedničky horního řádku.

# Schodovitý tvar matice

---

Matice je v (řádkově) **schodovitém** tvaru jestliže:

- První nenulový prvek v každém řádku (pokud existuje) je 1; tzv. **vedoucí jednička**.
- Nulové řádky jsou dole.
- Ve dvou následujících nenulových řádcích je vedoucí jednička spodního řádku napravo od vedoucí jedničky horního řádku.

Pokud navíc každý sloupec obsahující vedoucí jedničku má jinde nuly, mluvíme o vyredukovaném schodovitém tvaru.

# Schodovitý tvar matice

---

Matice je v (řádkově) **schodovitém** tvaru jestliže:

- První nenulový prvek v každém řádku (pokud existuje) je 1; tzv. **vedoucí jednička**.
- Nulové řádky jsou dole.
- Ve dvou následujících nenulových řádcích je vedoucí jednička spodního řádku napravo od vedoucí jedničky horního řádku.

Pokud navíc každý sloupec obsahující vedoucí jedničku má jinde nuly, mluvíme o vyredukovaném schodovitém tvaru.

Každou matici lze převést pomocí eřů do těchto tvarů.



# Počet řešení lineární soustavy

---

Množina řešení lineární soustavy (nad nekonečným tělesem) je:

- jednoprvková nebo
- prázdná nebo
- nekonečná.

# Počet řešení lineární soustavy

---

Množina řešení lineární soustavy (nad nekonečným tělesem) je:

- jednoprvková nebo
- prázdná nebo
- nekonečná.

Při změně „pravých stran“ soustavy se množina řešení může změnit z prázdné na nekonečnou a naopak.

# Počet řešení lineární soustavy

---

Množina řešení lineární soustavy (nad nekonečným tělesem) je:

- jednoprvková nebo
- prázdná nebo
- nekonečná.

Při změně „pravých stran“ soustavy se množina řešení může změnit z prázdné na nekonečnou a naopak.

Pro **homogenní** soustavy (pravé strany nulové) je množina řešení jednoprvková nebo nekonečná.

# Matice — definice

---

Co je matice?

# Matice — definice

---

Co je matice?

Neformálně: Obdélníkové schéma s prvky z okruhu  $R$ .

# Matice — definice

---

Co je matice?

Neformálně: Obdélníkové schéma s prvky z okruhu  $R$ .

**Matice typu**  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

# Matice — definice

---

Co je matice?

Neformálně: Obdélníkové schéma s prvky z okruhu  $R$ .

**Matice typu**  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Formálně:  $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow R$

# Matice — definice

---

Co je matice?

Neformálně: Obdélníkové schéma s prvky z okruhu  $R$ .

**Matice typu**  $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Formálně:  $A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow R$

Značení  $A = (a_{ij})$  (pokud známe typ)



# Sčítání matic

---

Označme  $Mat_{mn}(R)$  množinu všech matic typu  $m \times n$  nad okruhem  $R$ .

Pro  $A, B \in Mat_{mn}(R)$  definujeme matici  $A + B \in Mat_{mn}(R)$ , vztahem  $A + B = (c_{ij})$  kde  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

# Sčítání matic

---

Označme  $Mat_{mn}(R)$  množinu všech matic typu  $m \times n$  nad okruhem  $R$ .

Pro  $A, B \in Mat_{mn}(R)$  definujeme matici  $A + B \in Mat_{mn}(R)$ , vztahem  $A + B = (c_{ij})$  kde  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

$(Mat_{mn}(R), +)$  je komutativní grupa.

**Nulová matice, opačná matice**

# Sčítání matic

---

Označme  $Mat_{mn}(R)$  množinu všech matic typu  $m \times n$  nad okruhem  $R$ .

Pro  $A, B \in Mat_{mn}(R)$  definujeme matici  $A + B \in Mat_{mn}(R)$ , vztahem  $A + B = (c_{ij})$  kde  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

$(Mat_{mn}(R), +)$  je komutativní grupa.

## Nulová matice, opačná matice

Pro  $A \in Mat_{mn}(R)$  a  $r \in R$  definujeme **násobek**  $r \cdot A$  jako matici  $(c_{ij}) \in Mat_{mn}(R)$ , kde  $c_{ij} = r \cdot a_{ij}$ .

# Násobení matic

---

# Násobení matic

---

Pro matici  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  a matici  $B = (b_{kl})$  typu  $n \times p$  definujeme součin  $A \cdot B$  jako matici  $(c_{st})$  typu  $m \times p$ , kde

$$c_{st} = \sum_{j=1}^n a_{sj} b_{jt}.$$

# Násobení matic

---

Pro matici  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  a matici  $B = (b_{kl})$  typu  $n \times p$  definujeme součin  $A \cdot B$  jako matici  $(c_{st})$  typu  $m \times p$ , kde

$$c_{st} = \sum_{j=1}^n a_{sj} b_{jt}.$$

Systemy lineárních rovnic

$$Ax = b.$$

Eřú — násobení jistou maticí.

# Vlastnosti násobení matic

---

Násobení matic je asociativní:

Je-li  $A$  typu  $m \times n$ ,  $B$  typu  $n \times p$  a  $C$  typu  $p \times q$ , pak  
 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

# Vlastnosti násobení matic

---

Násobení matic je asociativní:

Je-li  $A$  typu  $m \times n$ ,  $B$  typu  $n \times p$  a  $C$  typu  $p \times q$ , pak  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

Pro  $m = n$  lze matice násobit i sčítat (tzv. **čtvercové** matice).

**Věta.**

$(Mat_{nn}(R), +, \cdot)$  je okruh.

Dk:

sami — skripta.



# Vlastnosti násobení matic

---

Násobení matic je asociativní:

Je-li  $A$  typu  $m \times n$ ,  $B$  typu  $n \times p$  a  $C$  typu  $p \times q$ , pak  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

Pro  $m = n$  lze matice násobit i sčítat (tzv. **čtvercové** matice).

**Věta.**

$(Mat_{nn}(R), +, \cdot)$  je okruh.

Dk:

sami — skripta.

zpravidla není komutativní

neutrální prvek vzhledem k násobení — jednotková matice  
inverze?

# Systemy rovnic a inverzní matice

---

# Systemy rovnic a inverzní matice

---

$$Ax = b$$

$A$  matice typu  $n \times n$  ke které existuje inverze  $A^{-1}$  (typu  $n \times n$ ) pak

$$x = A^{-1}b$$

je jediné řešení soustavy  $Ax = b$ .

# Systemy rovnic a inverzní matice

---

$$Ax = b$$

$A$  matice typu  $n \times n$  ke které existuje inverze  $A^{-1}$  (typu  $n \times n$ ) pak

$$x = A^{-1}b$$

je jediné řešení soustavy  $Ax = b$ .

Výpočet inverze — souběžná úprava s jednotkovou maticí.

# Systemy rovnic a inverzní matice

---

$$Ax = b$$

$A$  matice typu  $n \times n$  ke které existuje inverze  $A^{-1}$  (typu  $n \times n$ ) pak

$$x = A^{-1}b$$

je jediné řešení soustavy  $Ax = b$ .

Výpočet inverze — souběžná úprava s jednotkovou maticí.

Další pojmy: **transponovaná matice**, **symetrická matice**, **stopa matice** ...