Determinanty

Ondřej Klíma

Systémy lineárních rovnic a matice

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

Vše nad tělesem.

Řešení $A \cdot x = b$

- elementární řádkové úpravy — Gaussova eliminace
  (násobení konstantou; výměna; přičtení násobku)
  lze vidět jako násobení vhodnými maticemi
- množina řešení
  - jednoprvková exist. A^{-1}
  - prázdná nebo nekonečná neexist. A^{-1}
- pro matici A^{-1} máme $x = A^{-1}b$

Výpočet A^{-1} — souběžná úprava s jednotkovou.
Charakterizace existence A^{-1} ?

Determinant — očekávání, plán

Obecná (korektní) definice $|A|$ (pro čtvercovou matici A).

Co dál:

- determinant a elementární řádkové úpravy,
- věta typu: A^{-1} existuje $\iff |A| \neq 0$,
- použití pro přímý výpočet řešení soustavy,
- výpočet determinantu,
- determinant a součin matic $(|A \cdot B| = |A| \cdot |B|)$,
- další aplikace determinantu (objem, vlastní čísla).

Determinant — matice typu 2×2, 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

Determinant — definice

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n nad tělesem R.
Determinant matice $|A|$ je prvek z R definovaný předpisem:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} p(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Zde S_n je množina všech permutací množiny $\{1, 2, \dots, n\}$.
$p(\sigma)$ je parita permutace σ ($p(\sigma) = \pm 1$).
Pro počítání s paritou platí:

- $p(\sigma \circ \tau) = p(\sigma) \cdot p(\tau)$,
- $p(\sigma) = -1$ pro transpozici σ
  (transpozice — výměna dvou prvků).

Determinant — příklady

- $|E| = 1$
- $n = 2$, $n = 3$
- horní trojúhelníková matice
- matice elementárních řádkových úprav
- $|A|$=$|A^\top|$
- nulový řádek $|A| = 0$

Lemma 1.
Vznikne-li matice B přehozením dvou řádků čtvercové matice A, pak $|B| = -|A|$.
Lemma 2.
Jsou-li některé dva řádky čtvercové matice A stejné, pak $|A| = 0$.

Determinant a elementární řádkové úpravy

Lemma 3.
Vznikne-li matice B vynásobením některého řádku čtvercové matice A konstantou c, pak $|B| = c|A|$.
Lemma 4. Nechť matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ a $C = (c_{ij})$ jsou tři čtvercové matice řádu n, které se od sebe liší pouze prvky k-tého řádku, přičemž k-tý řádek matice A je součtem k-tý řádků matic B a C, tj. $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$ pro $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Potom $|A| = |B| + |C|$.
Lemma 5.
Vznikne-li matice B z čtvercové matice A přičtením násobku některého řádku k jinému řádku, pak $|B| = |A|$.

Metoda výpočtu determinantu pomocí eřú.
Pozor: Neplatí $|B + C| = |B| + |C|$.

Laplaceův rozvoj

Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pro zvolené indexy i, j označme A_{ij} čtvercovou matici řádu $n - 1$, která vznikne z A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Pak prvek

$$\widehat{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|$$

nazýváme **algebraický doplněk** prvku a_{ij} v matici A.

Věta (Laplaceův rozvoj).
Buď $A = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu $n > 1$. Pak pro libovolný index i platí

$$|A| = a_{i1}\widehat{A_{i1}} + a_{i2}\widehat{A_{i2}} + \cdots + a_{in}\widehat{A_{in}}.$$

Inverze pomocí adjungované matice

Laplaceův rozvoj

- pomocí sloupce — důkaz transponováním,
- další metoda výpočtu determinantu.

Definujeme $\widehat{A} = (\widehat{A_{ij}})$ matici řádu n složenou z algebraických doplňků. K ní transponovanou matici $A^* = \widehat{A}^\top$ nazýváme **adjungovanou** maticí k matici A.

Věta. Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak

$$A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*.$$

Důsledek. A^{-1} existuje $\iff$ $|A| \neq 0$.

Cramerovo pravidlo

$Ax = b$, $|A| \neq 0$, tzn. $x = A^{-1}b$.

Věta. Buď A čtvercová matice řádu $n > 1$ taková, že $|A| \neq 0$. Pak soustava $Ax = b$ má jediné řešení $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, kde

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|},$$

přičemž A_j je matice vzniklá z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce sloupcem b.

Cauchyova věta

Věta.
Pro libovolné dvě čtvercové matice A a B stejného řádu platí

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

Důsledky:

- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- Množina matic majících determinant 1 tvoří vzhledem k násobení grupu.