# Vektorové prostory

Ondřej Klíma



# Vektorové prostory — definice

Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a buď $(\mathbf{V}, +)$ komutativní grupa. Nechť je dále dáno zobrazení $\cdot : T \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ takové, že pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$
\begin{aligned}
& s \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{u} + s \cdot \mathbf{v}, \\
& (s + t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot \mathbf{u} + t \cdot \mathbf{u}, \\
& (s \cdot t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot (t \cdot \mathbf{u}), \\
& 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Pak trojice $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ se nazývá **vektorový prostor nad tělesem** $(T, +, \cdot)$.

# Vektorové prostory — terminologie

- prvky množiny $\mathbf{V}$ — **vektory**
- prvky množiny $T$ — **skaláry**
- neutrální prvek grupy $(\mathbf{V}, +)$ — **nulový vektor**, $\mathbf{o}$
- opačný prvek k vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ — **opačný vektor**, $-\mathbf{u}$
- vektor $s \cdot \mathbf{u}$ — **skalární násobek** vektoru $\mathbf{u}$ prvkem $s$.



# Vektorové prostory — příklady

- „vektory v rovině“, $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^n$
- matice nad tělesem
- polynomy nad tělesem
- funkce
- $\mathbb{C}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}$ vektorový prostor nad $\mathbb{Q}$
- $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- $S$ podtěleso $T$, pak $T$ je vektorový prostor nad $S$
- množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

# Vektorové prostory — vlastnosti

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ značíme $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

**Lemma.**
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.
Pak pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí

$$s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s{\cdot}\mathbf{u} - s{\cdot}\mathbf{v},$$
$$(s - t) \cdot \mathbf{u} = s{\cdot}\mathbf{u} - t{\cdot}\mathbf{u},$$
$$s \cdot (-\mathbf{u}) = (-s) \cdot \mathbf{u} = -(s{\cdot}\mathbf{u}),$$
$$s{\cdot}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff s = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$



# Podprostor vektorového prostoru

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ je podmnožina splňující následující podmínky:

$$\mathbf{o} \in \mathbf{W},$$
$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W})(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W}),$$
$$(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{W})(s{\cdot}\mathbf{u} \in \mathbf{W}).$$

Pak říkáme, že $\mathbf{W}$ je **podprostor** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Pozn. pro $\mathbf{u} \in \mathbf{W}$ máme $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W}$,
tj. $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ je vektorovým prostorem nad $T$.

# Průnik podprostorů

**Věta.**
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor podprostorů $\mathbf{W}_i$ vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde $i \in I$, platí, že průnik tohoto souboru podprostorů $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ je také podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.



# Generování podprostorů

$\langle M \rangle$ — nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, který obsahuje množinu $M$. O podprostoru $\langle M \rangle$ říkáme, že je to podprostor **generovaný** množinou $M$, $M$ říkáme množina **generátorů** podprostoru $\langle M \rangle$.

**Věta.**
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $M \subseteq \mathbf{V}$, $M \neq \emptyset$ je libovolná podmnožina. Pak platí následující rovnost:

$$\langle M \rangle = \{ s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \mid n \in \mathbb{N},\ s_1, s_2, \ldots, s_n \in T,\ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in M \}.$$