
Vektorové prostory

Ondřej Klíma

Vektorové prostory — definice

Bud' $(T, +, \cdot)$ těleso a bud' $(V, +)$ komutativní grupa. Nechť je dále dáno zobrazení $\cdot : T \times V \rightarrow V$ takové, že pro libovolná $s, t \in T$ a $u, v \in V$ platí

$$s \cdot (u + v) = s \cdot u + s \cdot v,$$

$$(s + t) \cdot u = s \cdot u + t \cdot u,$$

$$(s \cdot t) \cdot u = s \cdot (t \cdot u),$$

$$1 \cdot u = u.$$

Pak trojice $(V, +, \cdot)$ se nazývá **vektorový prostor nad tělesem** $(T, +, \cdot)$.

Vektorové prostory — terminologie

- prvky množiny V — **vektory**
- prvky množiny T — **skaláry**
- neutrální prvek grupy $(V, +)$ — **nulový vektor**, o
- opačný prvek k vektoru $u \in V$ — **opačný vektor**, $-u$
- vektor $s \cdot u$ — **skalární násobek** vektoru u prvkem s .

Vektorové prostory — příklady

- „vektory v rovině“, \mathbb{R}^2
- \mathbb{R}^n
- matice nad tělesem
- polynomy nad tělesem
- funkce
- \mathbb{C} vektorový prostor nad \mathbb{R}
- \mathbb{R} vektorový prostor nad \mathbb{Q}
- $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$
- S podtěleso T , pak T je vektorový prostor nad S
- množina řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

Vektorové prostory — vlastnosti

Pro libovolné vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ značíme $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ vektor $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Lemma.

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.
Pak pro libovolná $s, t \in T$ a $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

$$s \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{u} - s \cdot \mathbf{v},$$

$$(s - t) \cdot \mathbf{u} = s \cdot \mathbf{u} - t \cdot \mathbf{u},$$

$$s \cdot (-\mathbf{u}) = (-s) \cdot \mathbf{u} = -(s \cdot \mathbf{u}),$$

$$s \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff s = 0 \vee \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Podprostor vektorového prostoru

Bud' $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Necht' $W \subseteq V$ je podmnožina splňující následující podmínky:

$$\mathbf{0} \in W,$$

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W)(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W),$$

$$(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in W)(s \cdot \mathbf{u} \in W).$$

Pak říkáme, že W je **podprostor** vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$.

Pozn. pro $\mathbf{u} \in W$ máme $-\mathbf{u} = (-1) \cdot \mathbf{u} \in W$,
tj. $(W, +, \cdot)$ je vektorovým prostorem nad T .

Průnik podprostorů

Věta.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.
Pak pro libovolnou indexovou množinu $I \neq \emptyset$ a pro libovolný soubor podprostorů \mathbf{W}_i vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, kde $i \in I$, platí, že průnik tohoto souboru podprostorů $\bigcap_{i \in I} \mathbf{W}_i$ je také podprostorem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Generování podprostorů

$\langle M \rangle$ — nejmenší podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, který obsahuje množinu M . O podprostoru $\langle M \rangle$ říkáme, že je to podprostor **generovaný** množinou M , M říkáme množina **generátorů** podprostoru $\langle M \rangle$.

Věta.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $M \subseteq \mathbf{V}$, $M \neq \emptyset$ je libovolná podmnožina. Pak platí následující rovnost:

$$\langle M \rangle = \{s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \mid n \in \mathbb{N}, s_1, s_2, \dots, s_n \in T, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \in M\}.$$