

Báze a dimenze vektorových prostorů

Ondřej Klíma

Báze a dimenze vektorových prostorů – p.1/11

Vektorové prostory

- $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$
 $(\mathbf{V}, +)$ komutativní grupa, $\cdot : T \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, splňující ...
- \mathbf{W} podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$
 $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$,
 $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W})(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W})$,
 $(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{W})(s \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W})$.
- Podprostor $\langle M \rangle$ generovaný množinou M .
(Lineární obal množiny M)
$$\langle M \rangle = \{s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in T, \mathbf{u}_i \in M\}$$

Báze a dimenze vektorových prostorů – p.2/11

$(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$,
 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ konečná posloupnost vektorů z V .
 Existují-li prvky $s_1, s_2, \dots, s_n \in T$, z nichž alespoň jeden je
 různý od nuly 0 , takové, že

$$s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0},$$

řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou **lineárně závislé**.

Věta.

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.
 Posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ z V je lineárně závislá
 právě tehdy, když existuje index $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ takový, že
 vektor \mathbf{u}_i je lineární kombinací vektorů

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n$.

Lineárně nezávislé vektory

Není-li posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ z V lineárně
 závislá, řekneme, že tato posloupnost je **lineárně
 nezávislá**.

Jinak řečeno, vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé,
 jestliže pro libovolná $s_1, s_2, \dots, s_n \in T$ platí

$$s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \implies s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0.$$

Platí:

- jeden vektor \mathbf{u} je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$;
- vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} jsou lineárně závislé právě tehdy, když je jeden z nich násobkem druhého;
- pokud některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je $\mathbf{0}$, pak jsou lineárně závislé;
- pokud jsou si některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ rovny, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;
- podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti vektorů je lineárně nezávislá.

Jednoznačné vyjádření vektorů

Věta.

Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{v} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \dots + s_n\mathbf{u}_n$ pro **jedinou** n -tici $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in T^n$.

Věta.

Pokud jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé, pak pro vektor \mathbf{v} jsou následující podmínky ekvivalentní:

- i) $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$;
- ii) vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé;
- iii) $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$;

Věta. Buď $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.
Nechť $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_n$ jsou takové vektory z V , že

- $v_1, \dots, v_m \in \langle w_1, \dots, w_n \rangle$,
- vektory v_1, \dots, v_m jsou lineárně nezávislé.

Pak platí

- $m \leq n$,
- z vektorů w_1, \dots, w_n lze vybrat vektory w'_{m+1}, \dots, w'_n takové, že

$$\langle w_1, \dots, w_n \rangle = \langle v_1, \dots, v_m, w'_{m+1}, \dots, w'_n \rangle.$$

Standardní příklady v \mathbb{R}^n

- Rozhodnout, zda pro dané vektory $u_1, u_2, \dots, u_n, v \in \mathbb{R}^n$ patří vektor v do lineárního obalu $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle$.
- Rozhodnout, zda dané vektory $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé.
- Vybrat z vektorů $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ podposloupnost lineárně nezávislých vektorů, které generují stejný podprostor.

Metoda řešení:

Poskládat vektory do sloupců a použít Gaussovu eliminaci.

Bud' $(V, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

Řekneme, že konečná posloupnost u_1, u_2, \dots, u_n vektorů z V je **báze** vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, jestliže

- vektory u_1, u_2, \dots, u_n jsou lineárně nezávislé,
- vektory u_1, u_2, \dots, u_n generují celý prostor V .
($\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = V$)

Existence báze

Věta.

Nechť $(V, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Existuje-li konečná podmnožina $M \subseteq V$ taková, že $\langle M \rangle = V$, pak z každé podmnožiny $N \subseteq V$ s vlastností $\langle N \rangle = V$ lze vybrat nějakou bázi prostoru $(V, +, \cdot)$.

Věta.

Nechť $(V, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Tvoří-li posloupnosti vektorů f_1, f_2, \dots, f_m a g_1, g_2, \dots, g_n dvě báze vektorového prostoru $(V, +, \cdot)$, pak platí rovnost $m = n$.

Dimenze — definice

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, který obsahuje konečnou podmnožinu $M \subseteq \mathbf{V}$ takovou, že $\langle M \rangle = \mathbf{V}$ (a který tudíž má i nějakou bázi) pak počet vektorů kterékoliv báze tohoto prostoru se nazývá **dimenze** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.