Báze a dimenze vektorových prostorů

Ondřej Klíma

Vektorové prostory

- $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$

  $(\mathbf{V}, +)$ komutativní grupa, $\quad \cdot : T \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, splňující ...
- $\mathbf{W}$ podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$

  $\mathbf{o} \in \mathbf{W}$,
  $(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{W})(\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbf{W})$,
  $(\forall s \in T)(\forall \mathbf{u} \in \mathbf{W})(s \cdot \mathbf{u} \in \mathbf{W})$.
- Podprostor $\langle M \rangle$ generovaný množinou M.
  (Lineární obal množiny M)

  $\langle M \rangle = \{s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in T, \mathbf{u}_i \in M\}$

Lineárně závislé vektory

$(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$,
$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ konečná posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$.
Existují-li prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, z nichž alespoň jeden je různý od nuly 0, takové, že

$$s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o},$$

řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou **lineárně závislé**.

Věta.
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ z $\mathbf{V}$ je lineárně závislá právě tehdy, když existuje index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že vektor $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací vektorů
$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Lineárně nezávislé vektory

Není-li posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ z $\mathbf{V}$ lineárně závislá, řekneme, že tato posloupnost je **lineárně nezávislá**.

Jinak řečeno, vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže pro libovolná $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ platí

$$s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o} \implies s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0.$$

Nezávislost — speciální případy

Platí:

- jeden vektor $\mathbf{u}$ je lineárně nezávislý právě tehdy, když $\mathbf{u} \neq 0$;
- vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když je jeden z nich násobkem druhého;
- pokud některý z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ je $\mathbf{o}$, pak jsou lineárně závislé;
- pokud jsou si některé dva z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ rovny, pak jsou tyto vektory lineárně závislé;
- podposloupnost lineárně nezávislé posloupnosti vektorů je lineárně nezávislá.

Jednoznačné vyjádření vektorů

Věta.
Vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{v} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \cdots + s_n\mathbf{u}_n$ pro **jedinou** n-tici $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in T^n$.

Věta.
Pokud jsou vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislé, pak pro vektor $\mathbf{v}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:
i) $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$;
ii) vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé;
iii) $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$;

Steinitzova věta o výměně

Věta. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ jsou takové vektory z $\mathbf{V}$, že

- $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$,
- vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Pak platí

- $m \leq n$,
- z vektorů $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ lze vybrat vektory $\mathbf{w'}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w'}_n$ takové, že

$$\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w'}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w'}_n \rangle.$$

Standardní příklady v $\mathbb{R}^n$

- Rozhodnout, zda pro dané vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ patří vektor $\mathbf{v}$ do lineárního obalu $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle$.
- Rozhodnout, zda dané vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ jsou lineárně nezávislé.
- Vybrat z vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ podposloupnost lineárně nezávislých vektorů, které generují stejný podprostor.

Metoda řešení:
Poskládat vektory do sloupců a použít Gaussovu eliminaci.

Báze — definice

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.
Řekneme, že konečná posloupnost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorů z $\mathbf{V}$ je **báze** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, jestliže

- vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé,
- vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují celý prostor $\mathbf{V}$.
  ($\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$)

Existence báze

Věta.
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Existuje-li konečná podmnožina $M \subseteq \mathbf{V}$ taková, že $\langle M \rangle = \mathbf{V}$, pak z každé podmnožiny $N \subseteq \mathbf{V}$ s vlastností $\langle N \rangle = \mathbf{V}$ lze vybrat nějakou bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Věta.
Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Tvoří-li posloupnosti vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ dvě báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, pak platí rovnost $m = n$.

Dimenze — definice

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, který obsahuje konečnou podmnožinu $M \subseteq \mathbf{V}$ takovou, že $\langle M \rangle = \mathbf{V}$
(a který tudíž má i nějakou bázi)
pak počet vektorů kterékoliv báze tohoto prostoru se nazývá **dimenze** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.