

# Souřadnice, změna báze, hodnost matice

Ondřej Klíma

Souřadnice, změna báze, hodnost matice – p.1/12

## Nezávislost vektorů — opakování

Vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně nezávislé, jestliže pro libovolná  $s_1, s_2, \dots, s_n \in T$  platí

$$s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o} \implies s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0.$$

Vektory  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor  $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$  lze vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{v} = s_1 \mathbf{u}_1 + s_2 \mathbf{u}_2 + \dots + s_n \mathbf{u}_n$  pro **jedinou**  $n$ -tici  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in T^n$ .

Souřadnice, změna báze, hodnost matice – p.2/12

Konečná posloupnost  $u_1, u_2, \dots, u_n$  vektorů z  $V$  je **báze** vektorového prostoru  $(V, +, \cdot)$ , jestliže

- vektory  $u_1, u_2, \dots, u_n$  jsou lineárně nezávislé,
- vektory  $u_1, u_2, \dots, u_n$  generují celý prostor  $V$ .  
(  $\langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle = V$  )

Ekvivalentně:

- minimální množina generátorů
- maximální lineárně nezávislá posloupnost vektorů

## Steinitzova věta a důsledky

Pokud existuje konečná množina generátorů v prostoru  $V$ , pak

- každou lineárně nezávislou množinu vektorů lze doplnit na bázi,
- z každé množiny generátorů lze vybrat bázi,
- každé dvě báze mají stejný počet prvků,
- tj. lze definovat dimenzi (počet vektorů v bázi),
- vlastní podprostor má menší dimenzi.

Je-li  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  báze prostoru  $V$ , pak každý vektor  $\mathbf{v} \in V$  lze vyjádřit ve tvaru  $\mathbf{v} = s_1\mathbf{u}_1 + s_2\mathbf{u}_2 + \dots + s_n\mathbf{u}_n$  pro **jedinou**  $n$ -tici  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in T^n$ .

Tuto  $n$ -tici  $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in T^n$  nazýváme **souřadnice** vektoru  $\mathbf{v}$  v bázi  $\alpha$ . (Zde záleží na pořadí vektorů v bázi!)  
Píšeme:  $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_n)_\alpha$ .

Příklady:

- polynomy —  $\mathbb{R}_n[x]$  —  $(n + 1)$  dimenzionální prostor, souřadnice polynomu v bázi  $\alpha = (x^n, \dots, x, 1)$  jsou koeficienty tohoto polynomu.
- $\mathbb{R}^n$  — souřadnice vektoru v kanonické bázi, přímo složky vektoru.

## Přiřazení souřadnic je izomorfismus

Nechť  $\alpha$  je báze  $n$ -dimenzionálního prostoru  $V$  nad tělesem  $T$ . Uvažme zobrazení  $\phi : V \rightarrow T^n$ , které vektoru přiřadí jeho souřadnice v bázi  $\alpha$ . Pak

- $\phi$  je surjektivní
- $\phi$  je injektivní
- pro  $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_n)_\alpha$  a  $\mathbf{u} = (t_1, t_2, \dots, t_n)_\alpha$  máme  $\mathbf{v} + \mathbf{u} = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n)_\alpha$ ;  
tzn.  $\phi$  „zachovává“ operaci sčítání vektorů
- pro  $\mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_n)_\alpha$  a  $t \in T$  máme  $(t \cdot \mathbf{v}) = (t \cdot s_1, t \cdot s_2, \dots, t \cdot s_n)_\alpha$ ;  
tzn.  $\phi$  „zachovává“ operaci násobení skalárem.

Celkem  $\phi : V \rightarrow T^n$  je izomorfismus vektorových prostorů.

Řešení standardních úloh v konečněrozměrných vektorových prostorech (např. lineární obal, závislost, hledání báze) lze převést na řešení stejných úloh v  $T^n$ .

Zde pak fungují obvyklé postupy (Gaussova eliminace, . . .).

Nestandardní úloha — změna báze.

## Změna báze

Kanonická báze  $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  vektorového prostoru  $T^n$ :

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, 0),$$

.....

$$\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

Nechť  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  je báze  $T^n$ , přičemž známe souřadnice vektorů  $\mathbf{u}_i$  v kanonické bázi  $\varepsilon$ .

Lze zjistit souřadnice libovolného vektoru  $v$  v jedné z bází, pokud známe jeho souřadnice v bázi druhé?

Nechť  $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$  a  $\alpha = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$  tvoří dvě báze prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ .

Nechť pro každé  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  jsou  $\mathbf{u}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})_\varepsilon$  souřadnice vektoru  $\mathbf{u}_j$  v bázi  $\varepsilon$ .

Pak čtvercová matice  $A = (a_{ij})$  se nazývá **matice přechodu** od báze  $\alpha$  k bázi  $\varepsilon$ .

Matici budeme značit  ${}_\varepsilon P_\alpha$ .

Pozor: v literatuře není jednotné! Někde se tato matice nazývá matice přechodu od báze  $\varepsilon$  k bázi  $\alpha$ .

V předchozím je  $\varepsilon$  libovolná báze (nikoliv kanonická).

## Matice přechodu — vlastnosti

Pro libovolný vektor  $\mathbf{v}$  a jeho souřadnice

$\mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_n)_\varepsilon = (t_1, t_2, \dots, t_n)_\alpha$  platí

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = {}_\varepsilon P_\alpha \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}.$$

Další vlastnosti:

- ${}_\varepsilon P_\alpha \cdot {}_\alpha P_\beta = {}_\varepsilon P_\beta,$
- ${}_\varepsilon P_\alpha = ({}_\alpha P_\varepsilon)^{-1}$  neboť  ${}_\alpha P_\alpha = E_n,$
- matice přechodu jsou invertibilní.

Nechť  $A = (a_{ij})$  je matice typu  $m \times n$  nad tělesem  $(T, +, \cdot)$ .

Řádky matice  $A$  lze chápat jako uspořádané  $n$ -tice prvků z  $T$ , a tedy jako prvky vektorového prostoru  $(T^n, +, \cdot)$ .

Řádky matice  $A$  potom generují jistý podprostor ve vektorovém prostoru  $(T^n, +, \cdot)$ .

Dimenze tohoto podprostoru generovaného řádky matice  $A$  se nazývá **řádková hodnost** matice  $A$ .

Podobně dimenze podprostoru vektorového prostoru  $(T^m, +, \cdot)$  generovaného sloupci matice  $A$  se pak nazývá **sloupcová hodnost** matice  $A$ .

## Hodnost a elementární úpravy

- Eřú nemění podprostor vektorového prostoru  $(T^n, +, \cdot)$  generovaný řádky matice  $A$ .  
Nemění se tak ani řádková hodnost matice  $A$ .
- Eřú nemění sloupcovou hodnost matice  $A$ .  
(Podprostor generovaný sloupci matice se mění.)
- Pro každou matici  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  nad tělesem  $(T, +, \cdot)$  platí, že její řádková hodnost je rovna její sloupcové hodnosti.
- Můžeme tedy pro každou matici  $A = (a_{ij})$  typu  $m \times n$  nad tělesem  $(T, +, \cdot)$  definovat **hodnost** matice  $A$  jako společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti.