

## Příklady matematických důkazů

Zkoušejte hledat řešení (důkazy) pro následující příklady. Řešte je pokud možno po pořadí, nejprve po týdnu zveřejním první půlku řešení, pak teprve druhou...

Mnoho zdaru!

**Příklad 1.** Co je špatného na následujícím “důkaze”?

Ukážeme, že platí  $2 = -2$ : Umocněním na druhou vzejde  $2^2 = 4 = (-2)^2$ , což je platná rovnost, a proto i původní vztah  $2 = -2$  je platný.

*Řešení.* Špatné je, že byl použit obrácený postup kroků – od neznámého závěru tvrzení zpět ke známým faktům, důkaz však musí jít vždy od známého k závěrům.  $\square$

**Příklad 2.** Co je špatného na následujícím “důkaze”?

Nechť  $a, b$  jsou celá čísla. Vyjdeme z předpokladu  $a = b$  a ukážeme, že  $a = -b$ . (Tj. po dosazení  $a = b = 2$  opět vyjde  $2 = -2$ .) Umocněním výchozího předpokladu  $a = b$  získáme  $a^2 = b^2$ , neboli  $0 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ . Pak je i  $0 \cdot (a - b) = 0 = (a + b)(a - b)$  a dále po zkrácení  $0 = a + b$ , tedy  $a = -b$ .

*Řešení.* Nyní je postup kroků správný, ale chybné je krácení výrazem  $(a - b)$ , neboť  $a - b = 0$  a nulou se nesmí krátit.  $\square$

**Příklad 3.** Dokažte indukcí podle  $k \geq 0$ , že číslo  $(2^{6k} - 1)$  je dělitelné sedmi.

*Řešení.* Budeme postupovat indukcí podle parametru  $k \geq 0$ .

- Pro  $k = 0$  platí, že  $2^0 - 1 = 0$  je dělitelné sedmi.
- Nechť nyní tvrzení platí pro nějaké  $k$ . Podívejme se, o kolik se změní hodnota výrazu  $(2^{6k} - 1)$  při zvětšení  $k$  o jedna:

$$(2^{6(k+1)} - 1) - (2^{6k} - 1) = 2^6 \cdot 2^{6k} - 2^{6k} = 2^{6k} \cdot (2^6 - 1) = 2^{6k} \cdot 63$$

Důležitým faktem nyní je, že číslo 63 je dělitelné sedmi. To ale znamená, že pokud  $(2^{6k} - 1)$  bylo dělitelné sedmi podle indukčního předpokladu, bude sedmi dělitelné i  $2^{6(k+1)} - 1$ .

Formálně tento indukční krok zapíšeme následovně: Nechť dle indukčního předpokladu  $2^{6k} - 1 = 7\ell$ , kde  $\ell$  je nějaké přirozené číslo. Pak

$$(2^{6(k+1)} - 1) = 2^6 \cdot 2^{6k} - 1 = (2^6 - 1) \cdot 2^{6k} + 2^{6k} - 1 = 63 \cdot 2^{6k} + 7\ell =$$

$$= 7 \cdot (9 \cdot 2^{6k} + \ell),$$

takže i tento výraz je dělitelný sedmi.

□

**Příklad 4.** Každá  $n$ -prvková množina má právě  $2^n$  podmnožin (včetně prázdné). Formálně

$$|2^X| = 2^{|X|}.$$

*Řešení.* Matematickou indukcí podle  $n$ :

- Pro  $n = 0$  tvrzení platí, neboť prázdná množina má jedinou podmnožinu, opět prázdnou.
- Nechť nyní tvrzení platí pro  $n \geq 0$ . Vezmeme libovolnou množinu  $X$  o  $n + 1 > 0$  prvcích. Zvolme prvek  $a \in X$  a označme  $X' = X \setminus \{a\}$ ,  $|X'| = n$ . Potom všech podmnožin  $P' \subseteq X'$  je podle indukčního předpokladu  $2^n$ . Pro prvek  $a$  navíc máme nezávislý výběr ze dvou možností: buď  $a$  dáme do podmnožiny  $P'$ , nebo nedáme. Celkem je tak  $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$  možností volby podmnožiny  $P \subset X$ , cbd.

Důkaz je hotov podle principu matematické indukce.

□

**Příklad 5.** Počet všech permutací  $n$ -prvkové množiny je  $n!$ , pro každé  $n \geq 0$ .

*Řešení.* Inducí podle  $n$ : Tvrzení platí pro  $n = 0$ , protože žádné prvky lze uspořádat jen jedním způsobem (stejně tak jeden prvek).

Mějme nyní  $n \geq 0$  a množinu  $P$  o  $n + 1$  prvcích, předpokládejme pro jednoduchost  $P = \{1, 2, \dots, n + 1\}$ . Zvolme první prvek  $p \in P$  naší permutace jedním z  $n + 1$  způsobů. Chtělo by se přímo říct, že potom už je volba zbytku permutace  $P \setminus \{p\}$  nezávislá na volbě prvního  $p$ , ale to formálně není pravda. Aby tomu tak skutečně bylo, musíme si zbylé prvky  $P \setminus \{p\}$  nejprve “přečíslovat” na  $\{1, 2, \dots, n\}$ , což počet voleb neovlivní.

Pak už však zbytek plyne jasně –  $n$ -prvková množina  $\{1, 2, \dots, n\}$  má podle indukčního předpokladu  $n!$  permutací, proto  $P$  má celkem  $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$  permutací. To je přesně to, co chceme.

□

Návod pro následující – metoda dvojího počítání:

Nechť každý případ nějakého (složeného) výběru lze dále rozlišit (*zjemnit*) na stejný počet  $\ell$  zjemněných možností. Dále necht získaný zjemněný výběr má celkem  $m$  různých možností (které jsme schopni spočítat). Potom počet všech možností původního výběru *je dán podílem*  $m/\ell$ .

**Příklad 6.** Počet všech  $k$ -prvkových variací z  $n$ -prvkové množiny je  $\frac{n!}{(n-k)!}$ , pro každé  $n \geq k \geq 0$ .

*Řešení.* Metodou dvojího počítání:

Budeme se dvěma způsoby dívat na výběr permutací  $n$ -prvkové množiny. Jak již víme, lze tyto permutace vybrat  $n!$  různými způsoby. Na druhou stranu lze vzít některou  $k$ -prvkovou variaci, její prvky dát na začátek permutace v jejich pořadí a zbylých  $n - k$  prvků seřadit za nimi jedním z  $(n - k)!$  různých způsobů. Z různých variací tímto postupem zřejmě získáme různé výsledné permutace, a přitom každou permutaci lze získat z variace vybírající jejích prvních  $k$  prvků.

Označíme-li  $x$  neznámý počet všech  $k$ -prvkových variací z  $n$ -prvkové množiny, lze výše popsaným postupem vytvořit právě  $x \cdot (n - k)!$  všech různých permutací  $n$ -prvkové množiny. Proto platí

$$x \cdot (n - k)! = n!,$$

$$x = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

□

**Příklad 7.** Počet všech  $k$ -prvkových kombinací z  $n$ -prvkové množiny je  $\binom{n}{k}$ , pro každé  $n \geq k \geq 0$ .

**Příklad 8.** Dokažte platnost následujícího vztahu pro všechna přirozená  $n \geq 1$ :

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) \cdot 3^i = (n-1) \cdot 3^{n+1} + 3$$

(Matematickou indukcí.)

Návod pro následující – Dirichletův princip:

Rozmístíme-li  $\ell + 1$  (nebo více) objektů do  $\ell$  přihrádek, v některé přihrádce musí být aspoň dva objekty.

**Příklad 9.** Mezi čtyřmi přirozenými čísly vždy najdeme dvě, jejichž rozdíl je dělitelný číslem 3.

**Příklad 10.** Na letním táboře 29 dětí stráví celkem 16 dní a 15 nocí. Každou noc jsou dva z táborníků na hlídce. Dokažte, že některé z dětí musí jít na hlídku za celý tábor aspoň dvakrát.

**Příklad 11.** 8 kamarádů jelo na 9 dní dovolené. Každý den některá (jedna) trojice z nich šla na výlet. Dokažte, že někteří dva z nich ani jednou nebyli spolu na výletě.