Domácí úlohy ke cvičení č. 1

1. V každém z následujících případů rozhodněte, zda pro uvedené dvě množiny platí rovnost nebo alespoň některá z inkluzí při libovolných množinách A, B, C, anebo zda lze najít množiny A, B, C, pro něž jsou uvedené dvě množiny inkluzí neporovnatelné. (Neporovnatelnost dvou množin inkluzí se značí symbolem $||$.) Je-li více platných možností, vyberte tu z nich, která vztah mezi danými dvěma množinami vyjadřuje nejvýstižněji.

a) $(C - (A \cup B)) \cup (A \cap B) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad (A \cup B \cup C) - ((A \cup B) \cap C)$

b) $(A \cup C) - ((A \cap C) - B) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad (C - (A - B)) \cup (A - C)$

c) $((A \cap C) \cup B) - (A - C) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad ((A - B) \cap C) \cup (B - A)$

d) $A \cap ((B - C) \cup (C - B)) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad (A \cap C) \cup (B - C)$

e) $(A - C) \cup ((B \cup C) - A) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad (C - A) \cup ((A \cup B) - C)$

f) $(A \cup (B - C)) \cap ((A - C) \cup B) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad ((A \cup B) - C) - (A \cap B)$

g) $(A \cup C) - (B - (A \cap C)) \quad = \quad \subseteq \quad \supseteq \quad || \quad (A - (B \cap C)) \cup (C - A)$

V dalších úlohách budeme pracovat s množinou

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

všech přirozených čísel a s množinou

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

všech celých čísel. Dále řekneme, že číslo $a \in \mathbb{Z}$ dělí číslo $b \in \mathbb{Z}$, jestliže existuje číslo $z \in \mathbb{Z}$ takové, že $b = a \cdot z$. Potom rovněž říkáme, že číslo a je dělitel čísla b, a tuto skutečnost symboly zapisujeme ve tvaru $a \mid b$.

2. Pro každou z následujících dvojic binárních relací $\varrho, \eta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rozhodněte, která z dále uvedených relací je rovna složení těchto relací $\eta \circ \varrho$. Definice všech dále uvedených relací jsou formulovány pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $a\,\varrho\,b \iff a{\cdot}b \geq 0,\ \ a\,\eta\,b \iff a{\cdot}b < 0,$

$a\,\eta\circ\varrho\,b \iff$ (1) $a \neq 0\ \ \&\ \ a{\cdot}b \geq 0,$
(2) $a \neq 0\ \ \&\ \ a{\cdot}b \leq 0,$
(3) $a{\cdot}b \leq 0\ \ \&\ \ b \neq 0,$
(4) $a{\cdot}b < 0.$

b) $a\,\varrho\,b \iff |b-a| \leq 2,\ \ a\,\eta\,b \iff 7 \mid (b-a),$

$a\,\eta\circ\varrho\,b \iff$ (1) $5 \mid (b-a)\ \vee\ 6 \mid (b-a)\ \vee\ 7 \mid (b-a),$
(2) $5 \mid (b-a)\ \vee\ 6 \mid (b-a)\ \vee\ 7 \mid (b-a)\ \vee\ 8 \mid (b-a)\ \vee\ 9 \mid (b-a),$
(3) $(\exists q \in \mathbb{Z})\,(\exists r \in \{-2,-1,0,1,2\})\,(\,b-a = 7q+r\,),$
(4) $(\exists q \in \mathbb{Z})\,(\exists r \in \{0,1,2\})\,(\,|b-a| = 7q+r\,).$

c) $a\,\varrho\,b \iff a \mid b\ \&\ |a| < |b|,\ \ a\,\eta\,b \iff a \mid b\ \&\ |a| \neq |b|,$

$a\,\eta\circ\varrho\,b \iff$ (1) $a \mid b\ \&\ |a| < |b|\ \&\ |b/a|$ není prvočíslo,
(2) $a \mid b\ \&\ |a| \neq |b|\ \&\ |b/a|$ není liché prvočíslo,
(3) $a \mid b\ \&\ a \neq 0\ \&\ |b/a|$ není prvočíslo,
(4) $a \mid b\ \&\ |a| \neq |b|\ \&\ |b/a|$ není prvočíslo.

d) $a\,\varrho\,b \iff |a-b| \geq 9,$
$a\,\eta\,b \iff |a-b| \leq 5,$

$a\,\eta\circ\varrho\,b \iff$ (1) $|a-b| \geq 14,$
(2) $|a-b| \leq 14,$
(3) $|a-b| \geq 4,$
(4) $|a-b| \leq 4.$

e) $a\,\varrho\,b \iff |a-b| \geq 8,$
$a\,\eta\,b \iff |a+b| \leq 3,$

$a\,\eta\circ\varrho\,b \iff$ (1) $|a-b| \geq 5,$
(2) $|a+b| \geq 5,$
(3) $|a-b| \leq 5,$
(4) $|a+b| \leq 5.$

3. O každé z následujících relací $\gamma \subseteq (\mathbb{N}\cup\{0\}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ rozhodněte, zda tato relace γ je zobrazením, a pokud ano, pak zda toto zobrazení je či není injektivní, případně surjektivní. Tytéž otázky zodpovězte taktéž pro inverzní relaci γ^{-1}. Ve všech případech jsou definice relace γ formulovány pro všechna $a \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ a všechna $(b,c) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

a) $a\,\gamma\,(b,c) \iff b \leq a \leq c$

b) $a\,\gamma\,(b,c) \iff a = b + (-1)^c$

c) $a\,\gamma\,(b,c) \iff a = c{\cdot}b^c$

d) $a\,\gamma\,(b,c) \iff b = 3^a + (-1)^a\ \ \&\ \ c = 5^a + (-3)^a$

e) $a\,\gamma\,(b,c) \iff 2^a = (2a+3){\cdot}(b-1) + c\ \ \&\ \ c < 2a+3$

f) $a\,\gamma\,(b,c) \iff (\exists d \in \mathbb{N})(\,b = a{\cdot}c + d - 1\ \ \&\ \ d \leq c\,)$

g) $a\,\gamma\,(b,c) \iff a + 1 = b^2{\cdot}c\ \ \&\ \ (\forall d \in \mathbb{N})(\,d^2 \mid c\ \Rightarrow\ d = 1)$