Domácí úlohy ke cvičení č. 6

1. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pro libovolná $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R} - \{0\}$ vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & a_1^{n-3}b_1^2 & \dots & a_1b_1^{n-2} & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & a_2^{n-3}b_2^2 & \dots & a_2b_2^{n-2} & b_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & a_n^{n-3}b_n^2 & \dots & a_nb_n^{n-2} & b_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

2. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Pro libovolná $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ splňující $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$, $\dots$, $x_n \neq 1$ vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \dots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

3. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Užitím Cauchyovy věty vypočtěte determinant nad $\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} 0 & y_1 - y_2 & y_1^2 - y_2^2 & \dots & y_1^{n-1} - y_2^{n-1} \\ 0 & y_2 - y_3 & y_2^2 - y_3^2 & \dots & y_2^{n-1} - y_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & y_{n-1} - y_n & y_{n-1}^2 - y_n^2 & \dots & y_{n-1}^{n-1} - y_n^{n-1} \\ 2 & y_1 + y_n & y_1^2 + y_n^2 & \dots & y_1^{n-1} + y_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

4. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Užitím Cauchyovy věty vypočtěte determinant nad $\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} \frac{1-\alpha_1^n\beta_1^n}{1-\alpha_1\beta_1} & \frac{1-\alpha_1^n\beta_2^n}{1-\alpha_1\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_1^n\beta_n^n}{1-\alpha_1\beta_n} \\ \frac{1-\alpha_2^n\beta_1^n}{1-\alpha_2\beta_1} & \frac{1-\alpha_2^n\beta_2^n}{1-\alpha_2\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_2^n\beta_n^n}{1-\alpha_2\beta_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1-\alpha_n^n\beta_1^n}{1-\alpha_n\beta_1} & \frac{1-\alpha_n^n\beta_2^n}{1-\alpha_n\beta_2} & \dots & \frac{1-\alpha_n^n\beta_n^n}{1-\alpha_n\beta_n} \end{vmatrix}.$$