Domácí úlohy ke cvičení č. 7

1. V každé z následujících úloh je dáno číselné těleso $(T, +, \cdot)$, množina $\mathbf{V}$, binární operace $\oplus : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a vnější operace $\circledcirc : T \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. Pokaždé rozhodněte, zda potom $(\mathbf{V}, \oplus, \circledcirc)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$.

a) Je dáno těleso $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ racionálních čísel, množina $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ všech zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, binární operace $\oplus$ je definována pro libovolná zobrazení $\varphi, \psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ předpisem

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})\big((\varphi \oplus \psi)(m, n) = \varphi(m, n) + \psi(m, n)\big)$$

a vnější operace $\circledcirc$ je definována pro každé $q \in \mathbb{Q}$ a pro každé zobrazení $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ předpisem

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})\big((q \circledcirc \varphi)(m, n) = q \cdot \varphi(m, n)\big).$$

b) Je dáno těleso $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ racionálních čísel, množina $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel, binární operace $\oplus$ je obvyklým sčítáním komplexních čísel a vnější operace $\circledcirc$ je definována pro každé $q \in \mathbb{Q}$ a každé $z \in \mathbb{C}$ předpisem

$$q \circledcirc z = \begin{cases} 0 & \text{pro } q = 0, \\ q^{-1} \cdot z & \text{pro } q \neq 0. \end{cases}$$

c) Je dáno těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reálných čísel, množina $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel, binární operace $\oplus$ je definována předpisem

$$(\forall s, t \in \mathbb{R}^+)(s \oplus t = s \cdot t)$$

a vnější operace $\circledcirc$ je definována předpisem

$$(\forall r \in \mathbb{R})(\forall s \in \mathbb{R}^+)(r \circledcirc s = s^r).$$

d) Je dáno těleso $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reálných čísel, množina $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech zobrazení $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, binární operace $\oplus$ je definována pro libovolná zobrazení $\gamma, \delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((\gamma \oplus \delta)(x) = \gamma(x) + \delta(x)\big)$$

a vnější operace $\circledcirc$ je definována pro každé $r \in \mathbb{R}$ a pro každé zobrazení $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$(\forall x \in \mathbb{R})\big((r \circledcirc \gamma)(x) = -r \cdot \gamma(x)\big).$$

e) Je dáno těleso $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ komplexních čísel, množina $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ všech zobrazení $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, binární operace $\oplus$ je definována pro libovolná zobrazení $\rho, \eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$(\forall z \in \mathbb{C})\big((\rho \oplus \eta)(z) = \rho(z) + \eta(z)\big)$$

a vnější operace $\circledcirc$ je definována pro každé $c \in \mathbb{C}$ a pro každé zobrazení $\eta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ předpisem

$$(\forall z \in \mathbb{C})\big((c \circledcirc \eta)(z) = \bar{c} \cdot \eta(z)\big).$$

2. O každé z následujících podmnožin $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}$ rozhodněte, zda se jedná o podprostor vektorového prostoru $(\mathbb{R}^{\langle 0,1 \rangle}, +, \cdot)$ nad tělesem reálných čísel $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ definovaného na přednášce v kapitole o vektorových prostorech.

a) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid (\forall n \in \mathbb{N})\big(f(\tfrac{1}{2^n}) = 0\big) \big\}$.

b) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid f(0) \cdot f(\tfrac{1}{4}) \cdot f(\tfrac{1}{2}) \cdot f(\tfrac{3}{4}) \cdot f(1) = 0 \big\}$.

c) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid (\exists r \in \mathbb{R})(\forall x \in \langle 0,1 \rangle)(f(x) \leq r) \big\}$.

d) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \langle 0,1 \rangle)(|f(x)| \leq n) \big\}$.

e) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid (\forall x \in \langle 0, \tfrac{1}{2} \rangle)(f(x) \leq f(1-x)) \big\}$.

f) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid (\forall x \in \langle 0,1 \rangle)(f(x) = -f(1-x)) \big\}$.

g) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid \{x \in \langle 0,1 \rangle \mid f(x) = 0\} \text{ je nekonečná} \big\}$.

h) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid \big(\exists g \in \mathbb{R}[x]\big)(\forall x \in \langle 0,1 \rangle)(f(x) = g(x)) \big\}$.

i) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid \big(\forall x \in \big\langle \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4} \big\rangle\big)(f(x) = 0) \big\}$.

j) $\mathbf{W} = \big\{ f : \langle 0,1 \rangle \to \mathbb{R} \mid (\exists r \in (0,1))(\forall x \in \langle r,1 \rangle)(f(r) \leq f(x)) \big\}$.