Domácí úlohy ke cvičení č. 9

1. V závislosti na hodnotách reálných parametrů s, t určete hodnosti matic:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & s & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -s & 4 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & t & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & t \\ 0 & 3 & -1 & t & 2 \end{pmatrix}.$$

2. V každém z následujících případů rozhodněte, zda pro uvedené dva podprostory $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ platí rovnost $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$ nebo alespoň některá z inkluzí $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{Q}$ či $\mathbf{P} \supseteq \mathbf{Q}$, případně zda jsou tyto dva podprostory inkluzí neporovnatelné, což se značí zápisem $\mathbf{P} \,||\, \mathbf{Q}$. Je-li více platných možností, vyberte tu z nich, která vztah mezi danými dvěma podprostory vyjadřuje nejvýstižněji.

a) $\mathbf{P} = \langle (1,2,-1,3,1), (2,-1,1,2,-2), (1,-1,2,-1,3) \rangle$,
$\mathbf{Q} = \langle (1,1,2,-1,9), (1,3,-1,3,4) \rangle$,

b) $\mathbf{P} = \langle (1,3,-2,1,-1), (2,-1,1,3,-3), (3,-5,4,5,-5) \rangle$,
$\mathbf{Q} = \langle (1,-4,3,2,-2), (0,7,-5,-1,1) \rangle$,

c) $\mathbf{P} = \langle (1,2,-3,-1,-2), (2,3,-1,-2,1), (1,3,-8,-1,-7) \rangle$,
$\mathbf{Q} = \langle (1,-1,-2,3,2), (1,4,1,-5,-1) \rangle$,

d) $\mathbf{P} = \langle (2,-1,1,1,-1), (1,2,-3,-1,2), (2,1,-2,1,-1) \rangle$,
$\mathbf{Q} = \langle (1,-2,2,-3,2), (2,-1,1,1,-4) \rangle$,

e) $\mathbf{P} = \langle (1,-2,-1,1,2), (3,-6,-3,3,6), (2,-4,-2,2,4) \rangle$,
$\mathbf{Q} = \langle (1,3,-2,-1,2), (1,-7,0,3,2) \rangle$.

3. V obou následujících případech vyberte ze zadaných vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5$ bázi podprostoru $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5 \rangle$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ a zbývající vektory vyjádřete jako lineární kombinace vektorů vámi vybrané báze.

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 3, -2, 1, -1),$
$\mathbf{u}_2 = (2, 1, -1, -2, 1),$
$\mathbf{u}_3 = (1, -2, 1, -3, 2),$
$\mathbf{u}_4 = (3, -1, 2, 1, -2),$
$\mathbf{u}_5 = (2, 1, 1, 4, -4),$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, -3, 1, 3, -2),$
$\mathbf{u}_2 = (2, -2, 3, 1, -1),$
$\mathbf{u}_3 = (3, 1, 2, -1, 2),$
$\mathbf{u}_4 = (1, 5, -4, -2, 5),$
$\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3, 5, 4).$

4. V obou následujících případech rozhodněte, zda dané lineárně nezávislé vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ leží v podprostoru vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ generovaném vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4$, a je-li tomu tak, vyberte z této druhé sady vektorů vhodné vektory tak, aby tyto vybrané vektory spolu s vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ tvořily bázi podprostoru $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4 \rangle$.

a) $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -1, 3, -2),$ $\quad \mathbf{w}_1 = (2, -3, 3, -5, 3),$
$\mathbf{u}_2 = (3, -1, 2, -2, 1),$ $\quad \mathbf{w}_2 = (1, -5, 4, -8, 5),$
$\mathbf{w}_3 = (4, 1, 1, 1, -1),$
$\mathbf{w}_4 = (3, -1, 5, -3, 1),$

b) $\mathbf{u}_1 = (1, 3, -2, -3, -1),$ $\quad \mathbf{w}_1 = (1, -3, 2, 3, -2),$
$\mathbf{u}_2 = (2, -2, 1, 3, -3),$ $\quad \mathbf{w}_2 = (1, -1, 1, 0, -2),$
$\mathbf{w}_3 = (3, -2, 1, -1, 2),$
$\mathbf{w}_4 = (1, -2, 1, -1, 5).$