

# 9. AFINNÍ PODPROSTORY A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

# Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic. Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru  $K^n$  a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jako množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

V celé kapitole  $K$  označuje pevné těleso,  $m, n$  jsou přirozená čísla.

# Obsah přednášky

## Obsah

<b>9</b>	<b>Afinní podprostory a SLR</b>	<b>4</b>
9.1	Podprostor řešení . . . . .	4
9.2	Frobeniova věta . . . . .	15
9.3	Parametrické a všeobecné rovnice	23

# Podprostor řešení I

## 9 Afinní podprostory a soustavy lineárních rovnic

### 9.1 Podprostor řešení homogenní soustavy a jeho báze

Nechť  $A \in K^{m \times n}$ ,  $b \in K^m$ . Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí  $A$

$$A \cdot x = 0.$$

# Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí  $\mathbf{A}$  a pravou stranou  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

# Podprostor řešení III

Předpisem  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$  je definované lineární zobrazení  $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ , přičemž  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \text{Ker}\varphi$ . Z toho okamžitě vyplývá

**Tvrzení 9.1.1** *Pro libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  množina  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$  řešení homogenní soustavy  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$  tvoří lineární podprostor vektorového prostoru  $K^n$ .*

# Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru  $\mathcal{R}(A)$  nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy  $A \cdot x = 0$ .

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení, a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem:

# Podprostor řešení $V$

Matici  $A$  upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar  $B \in K^{m \times n}$ .

Množinu  $\{1, \dots, n\}$  rozdělíme na dvě podmnožiny  $J$  a  $J'$ , podle toho, zda se v  $j$ -tém sloupci matice  $B$  nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme  $k$  počet prvků množiny  $J'$  a zapišme ji ve tvaru  $J' = \{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ .

# Podprostor řešení VI

Pro každý index  $j_l \in J'$  sestrojíme vektor  $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$  takto:

Zvolíme  $v_{j_l l} = 1$  a  $v_{j_i l} = 0$  pro  $i \neq l$ .

Pro  $j \in J$  vypočítáme hodnoty  $v_{jl}$  k uvedeným hodnotám parametrů  $v_{j_1 l}, \dots, v_{j_k l}$  tak, aby celý vektor  $\mathbf{v}_l$  vyhovoval podmínce  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$ .

Potom vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  tvoří bázi podprostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . Přitom zřejmě platí  $k = n - h(\mathbf{A})$ .

# Podprostor řešení VII

**Příklad 9.1.2** *Předpokládejme, že jsme matici  $A$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4.*

# Podprostor řešení VIII

*Tedy neznámé  $x_2$  a  $x_5$  si zvolíme za parametry a neznámé  $x_1, x_3$  a  $x_4$  si vyjádříme s jejich pomocí.*

*Naše první volba je  $x_2 = 1, x_5 = 0$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$ .*

*Druhá volba parametrů je  $x_2 = 0, x_5 = 1$ . Tomu odpovídá vektor  $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$ .*

*Potom vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  tvoří bázi podprostoru (fundamentální systém) řešení*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^5.$$

# Podprostor řešení IX

**Tvrzení 9.1.3** *Pro libovolnou matici  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$  platí*

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

# Podprostor řešení NS I

**Tvrzení 9.1.4** *Necht'  $A \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ .*

- (a) *Pokud  $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(A | \mathbf{b})$ , pak  $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(A)$ .*
- (b) *Pokud  $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(A | \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)$ , pak  $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(A | \mathbf{b})$ .*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(A | \mathbf{b}) &= \mathbf{z} + \mathcal{R}(A) = \{\mathbf{z} + \mathbf{x}; \mathbf{x} \in \mathcal{R}(A)\} \\ &= \mathbf{z} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \\ &= \{\mathbf{z} + c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k; c_1, \dots, c_k \in K\}.\end{aligned}$$

# Podprostor řešení NS II

**Tvrzení 9.1.5** *Necht'  $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in K^m$ . Pokud soustava  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má aspoň jedno řešení, tak  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b})$  je afinní podprostor v  $K^n$  se zaměřením  $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ . To znamená, že*

$$\text{Dir}\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

*a*

$$\dim\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

# Frobeniova věta I

## 9.2 Frobeniova věta a řešení nehomogenní soustavy

**Věta 9.2.1 (Frobenius)** *Nechť  $A \in K^{m \times n}$ ,  $b \in K^m$ . Potom nehomogenní soustava  $A \cdot x = b$  má řešení právě tehdy, když  $h(A | b) = h(A)$ .*

# Frobeniova věta II

Soustava  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  má alespoň jedno řešení  $\mathbf{z} \in K^n$  právě tehdy, když  $\mathbf{b} \in \text{Im}\varphi$  (kde  $\varphi(\mathbf{x}) = A \cdot \mathbf{x}$ ). Pak  $\mathcal{R}(A | \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(A)$ .

Frobeniova věta říká: nehomogenní soustava  $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  nemá řešení právě tehdy, když se při úpravě její rozšířené matice  $(A | \mathbf{b})$  na redukovaný stupňovitý tvar objeví nějaký řádek tvaru  $(0, \dots, 0 | d) \in K^{n+1}$ , kde  $0 \neq d \in K$ .  
Takovýto řádek totiž zodpovídá rovnici  $0 = d$ .

# Frobeniova věta III

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici  $(A | b)$  na redukovaný stupňovitý tvar  $(B | c)$ , kde  $B \in K^{m \times n}$  a  $c \in K^m$ , tak  $B$  je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom  $\mathcal{R}(A | b) = \mathcal{R}(B | c) \neq \emptyset$  právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice  $(B | c)$  nenachází v posledním, t. j.  $n + 1$ -ním sloupci.

# Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$  najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech  $J$ ,  $J'$  a  $k$  mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)^T$  nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů

$z_{j_1} = \dots = z_{j_k} = 0$  pro  $j_l \in J'$ . Zbývající hodnoty  $z_j$  potom vypočítáme tak, aby  $\mathbf{z}$  vyhovovalo podmínce  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c}$ , t. j.  $z_j = c_j$  pro  $j \in J$ .

# Frobeniova věta V

**Příklad 9.2.2** *Předpokládejme, že jsme matici  $(A | b)$  pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(B | c) = \left( \begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) .$$

# Frobeniova věta VI

Vidíme, že  $h(\mathbf{B} | \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$ , tedy  $\mathcal{R}(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} | \mathbf{c}) \neq \emptyset$ .

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Tedy neznámé  $x_4$ ,  $x_5$  a  $x_6$  si zvolíme za parametry a neznámé  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$  si vyjádříme pomocí nich.

První volbě  $x_4 = 1$ ,  $x_5 = x_6 = 0$  odpovídá vektor  $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$ .

# Frobeniova věta VII

Druhá volba  $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$  nám dá vektor  $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$ .

Třetí volbou  $x_4 = x_5 = 0, x_6 = 1$  získáme vektor  $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$ .

Potom vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  tvoří bázi podprostoru řešení  $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$  příslušné homogenní soustavy.

Konečně volbou parametrů  $x_4 = x_5 = x_6 = 0$  získáme jedno řešení  $\mathbf{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$  nehomogenní soustavy.

# Frobeniova věta VIII

Výsledek můžeme zapsat do tabulky:

	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$z$
$x_1$	-3	-1/4	0	2
$x_2$	-4	-2	1	-1
$x_3$	-1	5	-6	-2/7
$x_4$	1	0	0	0
$x_5$	0	1	0	0
$x_6$	0	0	1	0

# Parametrické a všeobecné rovnice I

## 9.3 Parametrické a všeobecné rovnice afinních podprostorů

Každý afinní podprostor  $M \subseteq K^n$  má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$$

pro nějaký bod  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T \in M$  a vhodnou uspořádanou  $k$ -tici  $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  vektorů z  $K^n$ , kde  $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \dots, u_{nj})^T$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice II

To znamená, že pro libovolné  $\mathbf{x} \in K^n$  platí  $\mathbf{x} \in M$  právě tehdy, když existuje  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T \in K^k$  tak, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t},$$

kde jsme uspořádanou  $k$ -tici  $\boldsymbol{\alpha}$  jako obyčejně ztotožnili s maticí  $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$  se sloupci  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice III

Rovnost  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$  je maticovým zápisem **parametrických rovnic** afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$ .

Vektor  $\mathbf{t} \in K^n$  nazýváme **vektorem parametrů** a jeho složky  $t_1, \dots, t_k \in K$  **parametry**.

# Parametrické a všeobecné rovnice IV

Po rozepsání do složek

$$x_1 = p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \dots + u_{1k}t_k$$

$$x_2 = p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \dots + u_{2k}t_k$$

$$x_n = p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_2 + \dots + u_{nk}t_k$$

dostaneme obvyklejší tvar, se kterým jsme sa v dimenzi  $n = 2$  resp.  $n = 3$  už potkali v středoškolské analytické geometrii.

# Parametrické a všeobecné rovnice $V$

Jsou-li navíc vektory  $u_1, \dots, u_k$  lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním „nadbytečných vektorů“, pak parametrické rovnice podprostoru  $M$  nám přímo ukáží jeho dimenzi:  $\dim M = k$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice VI

Zápis afinního podprostoru  $M \subseteq K^n$  ve tvaru  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ , kde  $\mathbf{p} \in M$  a  $\alpha$  je nějaká uspořádaná  $k$ -tice, která generuje jeho zaměření  $\text{Dir}M$  (můžeme si dovolit předpokládat, že  $\alpha$  je dokonce báze v  $\text{Dir}M$ ), budeme nazývat jeho ***parametrickým vyjádřením***.

Parametrické vyjádření  $M = \mathbf{p} + [\alpha]$  afinního podprostoru můžeme přímo přepsat do jeho parametrických rovnic  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ , ( $\mathbf{t} \in K^k$ ). Naopak, z jeho parametrických rovnic můžeme okamžitě získat jeho parametrické vyjádření.

# Parametrické a všeobecné rovnice VII

Každá soustava lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  s rozšířenou maticí  $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$  (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor  $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \subseteq K^n$ .

Vyřešit soustavu lineárních rovnic  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  znamená vlastně najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru  $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice VII

Nechť tedy  $M = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}]$  je afinní podprostor v  $K^n$ , daný bodem  $\mathbf{p} \in K^n$  a uspořádanou  $k$ -ticí  $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$  vektorů z  $K^n$ , kterou ztotožníme s maticí  $\boldsymbol{\alpha} = (u_{ij}) \in K^{n \times k}$  se sloupci  $\mathbf{u}_j$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice IX

Parametrické rovnice  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t}$  podprostoru  $M$ , kde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$  je vektor neznámých a  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)^T \in K^k$  je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{p}).$$

# Parametrické a všeobecné rovnice X

Naše metoda bude založená na ***eliminaci parametrů***  $t_1, \dots, t_k$  úpravou této matice pomocí ERO.

Matici  $(\mathbf{I}_n \mid \alpha \mid \mathbf{p})$  budeme upravovat na řádkově ekvivalentní matici tak, aby prostřední blok ve výsledné matici byl ve stupňovitém tvaru. Mohou pak nastat dvě možnosti

# Parametrické a všeobecné rovnice XI

- (1)  $h(\alpha) = n$ , což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové. V tomto případě  $M = V$  a všeobecné rovnice tohoto podprostoru tvoří prázdná soustava (t. j. soustava, která neobsahuje žádnou rovnici).

# Parametrické a všeobecné rovnice XII

(2)  $h(\alpha) < n$ . Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků  $\begin{pmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ , kde horní blok  $\mathbf{D}$  je stupňovitá matice typu  $h(\alpha) \times k$ , která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr  $(n - h(\alpha)) \times k$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice XII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right).$$

Potom  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$  jsou všeobecné rovnice afinního podprostoru  $M$ , t. j. platí  $M = \mathbf{p} + [\boldsymbol{\alpha}] = \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ .

# Parametrické a všeobecné rovnice XIV

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array} \right),$$

kde  $\mathbf{D}$  je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně  $h(\mathbf{D}) = h(\boldsymbol{\alpha})$ ).

# Parametrické a všeobecné rovnice XV

Z  $k$ -tice  $\alpha$  můžeme vybrat bázi zaměření  
 $\text{Dir}M = [\alpha]$ : je tvořena vektory  $u_{j_1}, \dots, u_{j_l}$ , kde  
 $1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq k$  jsou indexy těch sloupců  
matice  $D$ , ve kterých se nacházejí vedoucí prvky  
jejich řádků.

# Parametrické a všeobecné rovnice XV

**Tvrzení 9.3.1** *Nechť  $B \in K^{n \times m}$ ,  $C \in K^{n \times k}$  a  $p \in K^n$ . Pokud bloková matice  $(B \mid C \mid p)$  je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí*

$$\left( \begin{array}{c|c|c} A' & D & b' \\ \hline A & 0 & b \end{array} \right).$$

*kde  $D$  je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky, tak*

$$\mathcal{R}(A \mid b) = \{x \in K^m; (\exists t \in K^k)(B \cdot x = C \cdot t + p)\}.$$