

1. VEKTOROVÉ PROSTORY

Jan Paseka

Masarykova univerzita Brno

Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem *tělesa* a *vektorového prostoru*.

Abstrakt

V této kapitole zavedeme dva pojmy, které budou hrát v následujícím výkladu klíčovou úlohu a dokážeme o nich několik jednoduchých tvrzení. Půjde o pojem *tělesa* a *vektorového prostoru*. Prvky tělesa budeme nazývat *skaláry* a prvky vektorového prostoru *vektory*.

Obsah přednášky I

■ Úvod

- Základní číselné obory \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} ; pojem tělesa.
- Tělesa \mathbb{Z}_p

Obsah přednášky I

■ Úvod

- Základní číselné obory \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} ; pojem tělesa.
- Tělesa \mathbb{Z}_p

■ Geometrická interpretace vektorů v rovině a v třírozměrném prostoru

- Geometrická interpretace vektorů v \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 , rovnoběžníkové pravidlo

Obsah přednášky II

- Vektorové prostory
- Příklady vektorových prostorů (řádkově a sloupcově uspořádané n -tice skalárů, polynomy, rozšíření těles, funkce z množiny do tělesa a vektorového prostoru)

Číselné obory I

1 VEKTOROVÉ PROSTORY

1.1 Základní číselné obory

\mathbb{N} – množina všech přirozených čísel,

Číselné obory I

1 VEKTOROVÉ PROSTORY

1.1 Základní číselné obory

\mathbb{N} – množina všech přirozených čísel,

\mathbb{Z} – množina všech celých čísel,

Číselné obory I

1 VEKTOROVÉ PROSTORY

1.1 Základní číselné obory

\mathbb{N} – množina všech přirozených čísel,

\mathbb{Z} – množina všech celých čísel,

\mathbb{Q} – množina všech racionálních čísel,

Číselné obory I

1 VEKTOROVÉ PROSTORY

1.1 Základní číselné obory

\mathbb{N} – množina všech přirozených čísel,

\mathbb{Z} – množina všech celých čísel,

\mathbb{Q} – množina všech racionálních čísel,

\mathbb{R} – množina všech reálných čísel,

Číselné obory I

1 VEKTOROVÉ PROSTORY

1.1 Základní číselné obory

\mathbb{N} – množina všech přirozených čísel,

\mathbb{Z} – množina všech celých čísel,

\mathbb{Q} – množina všech racionálních čísel,

\mathbb{R} – množina všech reálných čísel,

\mathbb{C} – množina všech komplexních čísel.

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} - \mathbb{R}$)
budeme značit i .

Číselné obory II

Nulu považujeme za přirozené číslo, t. j. $0 \in \mathbb{N}$.

Imaginární jednotku (která je prvkem $\mathbb{C} - \mathbb{R}$) budeme značit i .

Prvky výše uvedených číselných oborů $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ nazýváme často *skaláry*. V tomto případě pak budeme mluvit o *číselném tělese*.

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítání* $+$ a *násobení* \cdot .

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítání* $+$ a *násobení* \cdot .

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Struktura číselných oborů I

Na každé z těchto množin jsou definované dvě binární operace, *sčítání* $+$ a *násobení* \cdot .

Obě tyto operace jsou asociativní a komutativní.

Násobení je (z obou stran) *distributivní* vzhledem ke sčítání, t. j. pro všechny prvky x, y, z příslušné množiny platí

$$x(y + z) = xy + xz, \quad (x + y)z = xz + yz.$$

Struktura číselných oborů II

Číselný obor \mathbb{N} je v porovnání s obory \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} „chudší“ – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} řešení $x = b - a$ pro libovolné a, b , ale v \mathbb{N} je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Struktura číselných oborů II

Číselný obor \mathbb{N} je v porovnání s obory \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} „chudší“ – totiž rovnice tvaru $x + a = b$ mají v oborech \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} řešení $x = b - a$ pro libovolné a, b , ale v \mathbb{N} je takováto rovnice řešitelná, pokud $a \leq b$.

Obory \mathbb{Q} , \mathbb{R} a \mathbb{C} jsou však „bohatší“ nejen v porovnání s \mathbb{N} , ale i s \mathbb{Z} – rovnice tvaru $ax = b$ mají v oborech \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} řešení pro libovolné $a \neq 0$ a b , přičemž v \mathbb{N} či \mathbb{Z} jsou řešitelné, pouze pokud a je dělitelem b .

Axiomy tělesa I

1.2 Tělesa

Tělesem nazýváme množinu K s dvěma význačnými prvky – nulou 0 a jedničkou 1 – a dvěma binárními operacemi na K – sčítáním $+$ a násobením \cdot – takovými, že platí

Axiomy tělesa II

$$(\forall a, b \in K)(a + b = b + a), (\forall a, b \in K)(a \cdot b = b \cdot a),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a + (b + c) = (a + b) + c),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c),$$

$$(\forall a \in K)(a + 0 = a), \quad (\forall a \in K)(1 \cdot a = a),$$

$$(\forall a \in K)(\exists b \in K)(a + b = 0),$$

$$(\forall a \in K \setminus \{0\})(\exists b \in K)(a \cdot b = 1),$$

$$(\forall a, b, c \in K)(a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)), \quad 0 \neq 1.$$

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Axiomy tělesa III

Sčítání a násobení v tělese jsou komutativní a asociativní operace a násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.

0 je neutrální prvek sčítání a 1 je neutrální prvek násobení a tyto prvky jsou navzájem různé.

Prvek $b \in K$ takový, že $a + b = 0$, je k danému $a \in K$ určený jednoznačně.

Tento jednoznačně určený prvek k danému a označujeme $-a$ a nazýváme *opačný prvek* k a . Místo $a + (-b)$ píšeme jen $a - b$.

Axiomy tělesa IV

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme *inverzní prvek* k a alebo *převrácená hodnota* prvku a .

Axiomy tělesa IV

Analogicky se lze přesvědčit, že i prvek $b \in K$ takový, že $a \cdot b = 1$ je k danému $0 \neq a \in K$ určený jednoznačně – označujeme ho a^{-1} nebo $\frac{1}{a}$, případně $1/a$ a nazýváme *inverzní prvek* k a alebo *převrácená hodnota* prvku a .

Místo $a \cdot b^{-1}$ píšeme též $\frac{a}{b}$ nebo a/b .

Vlastnosti tělesa I

Tvrzení 1.2.0 *Bud' K těleso. Potom pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a, b, c, b_1, \dots, b_n \in K$ platí*

(a) $a + b = a + c \Rightarrow b = c,$

(b) $(ab = ac \ \& \ a \neq 0) \Rightarrow b = c,$

(c) $a0 = 0,$

(d) $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0),$

(e) $-a = (-1)a,$

(f) $a(b - c) = ab - ac,$

(g) $a(b_1 + \dots + b_n) = ab_1 + \dots + ab_n.$

Vlastnosti tělesa II

Doplňme, že podmínky (a) a (b) se nazývají *zákony o krácení* pro sčítání resp. násobení v tělese.

Podmínka (e) nám umožňuje zavést libovolné celočíselné násobky prvků z tělesa. Pro $a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $(-n)a = -(na) = n(-a)$.

Podobně lze pro nenulové prvky tělesa zavést i libovolné celočíselné mocniny. Pro $0 \neq a \in K$, $n \in \mathbb{N}$ klademe $a^{-n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$.

Vlastnosti tělesa III

$$0a = 0, \quad 1a = a, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a,$$

$$n(a + b) = na + nb,$$

$$(m + n)a = ma + na,$$

$$(mn)a = m(na),$$

$$(mn)(ab) = (ma)(nb),$$

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

$$n < 0 \Rightarrow a \neq 0 \neq b,$$

$$a^{m+n} = a^m a^n,$$

$$(m < 0 \vee n < 0) \Rightarrow a \neq 0,$$

$$a^{mn} = (a^m)^n,$$

$$(m < 0 \vee n < 0) \Rightarrow a \neq 0$$

$$\forall a, b \in K, m, n \in \mathbb{Z}.$$

Vlastnosti tělesa IV

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je *podtěleso* tělesa K , pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Vlastnosti tělesa IV

Nechť K je těleso a $L \subseteq K$. Říkáme, že L je *podtěleso* tělesa K , pokud $0, 1 \in L$ a pro všechna $a, b \in L$ platí $a + b \in L$, $ab \in L$, $-a \in L$ a, pokud $a \neq 0$, tak i $a^{-1} \in L$.

Podtěleso tělesa K je tedy jeho podmnožina L , která obsahuje nulu a jedničku a je uzavřená vzhledem ke sčítání, násobení, opačnému a inverznímu prvku. Zřejmě každé podtěleso tělesa K je s těmito operacemi zúženými z K na L i samo tělesem. Říkáme pak, že těleso K je *rozšířením* tělesa L .

Vlastnosti tělesa V

Zřejmě těleso \mathbb{Q} je podtělesem tělesa \mathbb{R} i tělesa \mathbb{C} ; těleso \mathbb{C} je rozšířením těles \mathbb{Q} a \mathbb{R} .

Vlastnosti tělesa V

Zřejmě těleso \mathbb{Q} je podtělesem tělesa \mathbb{R} i tělesa \mathbb{C} ; těleso \mathbb{C} je rozšířením těles \mathbb{Q} a \mathbb{R} .

Charakteristikou tělesa K , píšeme $\text{char } K$, nazýváme nejmenší kladné celé číslo n takové, že $n1 = 0$; pokud takové n neexistuje, t. j. $n1 \neq 0$ pro každé celé $n > 0$, říkáme že K má charakteristiku ∞ (někteří autoři definují $\text{char } K = 0$).

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L , tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\text{char } K = \text{char } L$.

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L , tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\text{char } K = \text{char } L$.

Zřejmě $\text{char } \mathbb{Q} = \text{char } \mathbb{R} = \text{char } \mathbb{C} = \infty$.

Vlastnosti tělesa VI

Je-li těleso K rozšířením tělesa L , tak obě tělesa K a L mají tutéž jedničku i nulu, a proto $\text{char } K = \text{char } L$.

Zřejmě $\text{char } \mathbb{Q} = \text{char } \mathbb{R} = \text{char } \mathbb{C} = \infty$.

Věta 1.2.1 *Necht' K je těleso. Potom $\text{char } K$ je rovna ∞ nebo prvočíslu.*

Konečná tělesa I

1.3 Tělesa \mathbb{Z}_p

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞ .

Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Konečná tělesa I

1.3 Tělesa \mathbb{Z}_p

V tomto odstavci si ukážeme příklady těles, jejichž charakteristika není ∞ .

Z tohoto důvodu se tato tělesa podstatně liší od nám známých číselných těles.

Totíž, pro každé prvočíslo p sestrojíme jisté konečné těleso \mathbb{Z}_p , které má p prvků a charakteristiku p .

Naopak, dříve uvedená číselná tělesa jsou nekonečná.

Konečná tělesa II

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy \mathbb{R} a \mathbb{C} . Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Konečná tělesa II

Pro potřeby matematické analýzy, tedy i z hlediska fyzikálních aplikací, jsou nejdůležitějšími tělesy \mathbb{R} a \mathbb{C} . Konečná tělesa však v současnosti sehrávají důležitou úlohu např. v teorii kódování a kryptografii.

Pro každé kladné celé číslo n označme

$$\mathbb{Z}_n = \{k \in \mathbb{N}; k < n\} = \{0, 1, \dots, n - 1\}.$$

Konečná tělesa III

Množinu \mathbb{Z}_n nazýváme ***množinou zbytkových tříd modulo n*** . Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání \oplus a násobení \odot (je nutné odlišit sčítání a násobení v \mathbb{Z}_n od příslušných operací v \mathbb{Z}).

Konečná tělesa III

Množinu \mathbb{Z}_n nazýváme **množinou zbytkových tříd modulo n** . Na této množině zavedeme dvě binární operace – sčítání \oplus a násobení \odot (je nutné odlišit sčítání a násobení v \mathbb{Z}_n od příslušných operací v \mathbb{Z}).

Pro $a, b \in \mathbb{Z}_n$ klademe

$$a \oplus b = \text{zbytek po dělení } (a + b)/n,$$

$$a \odot b = \text{zbytek po dělení } (ab)/n.$$

Konečná tělesa IV

\oplus a \odot jsou asociativní a komutativní operace na \mathbb{Z}_n , 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Konečná tělesa IV

\oplus a \odot jsou asociativní a komutativní operace na \mathbb{Z}_n , 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Konečná tělesa IV

\oplus a \odot jsou asociativní a komutativní operace na \mathbb{Z}_n , 0 je neutrální prvek sčítání a, pro $n > 1$, 1 je neutrální prvek násobení.

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a $\ominus a = n - a$ je opačný prvek k $a \in \mathbb{Z}_n$.

Věta 1.3.1 *Množina \mathbb{Z}_n s operacemi \oplus a \odot je těleso právě tehdy, když n je prvočíslo.*

Konečná tělesa V

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

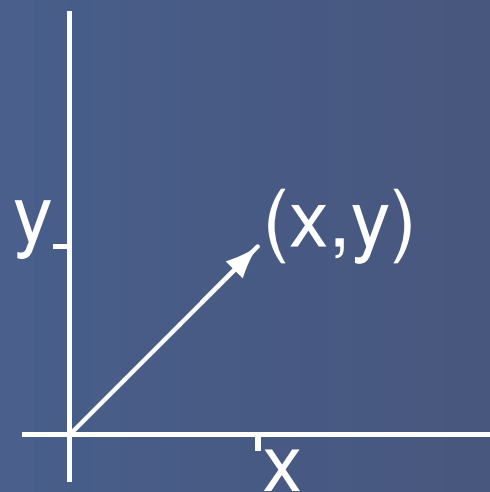
Multiplikativní tabulky sčítání a násobení v tělese \mathbb{Z}_5 .

Interpretace I

1.4 Geometrická interpretace vektorů v rovině a v třírozměrném prostoru

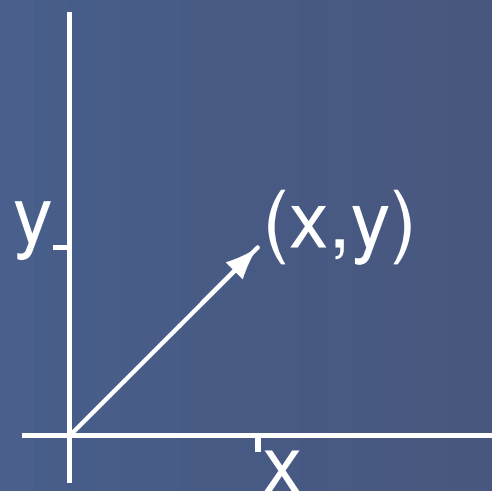
Vektory v rovině či v prostoru si představujeme jako orientované úsečky, t. j. úsečky, jejichž jeden krajní bod považujeme za počáteční a druhý za koncový – ten je označený obvykle šipkou.

Interpretace II



Vektor v rovině

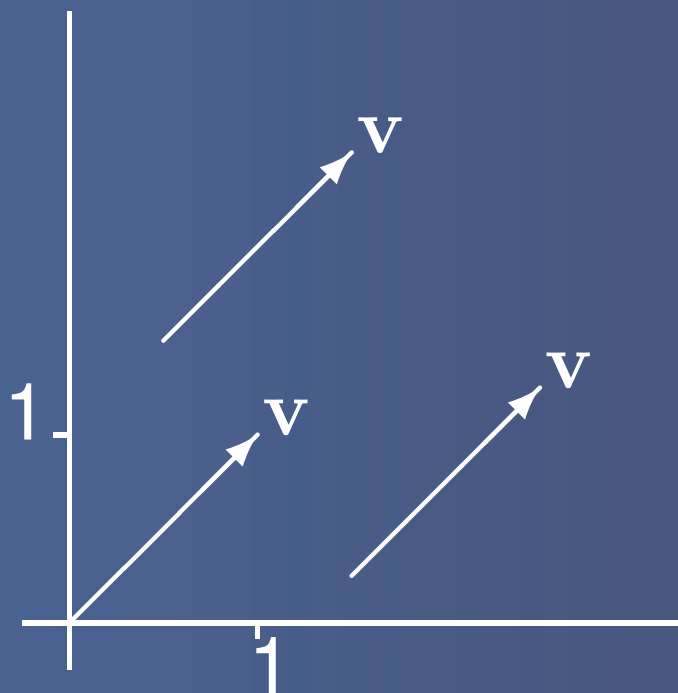
Interpretace II



Vektor v rovině

Přitom dvě stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované úsečky představují ten stejný vektor – říkáme, že jsou *umístění* téhož vektoru.

Interpretace III



Umístění téhož vektoru

Interpretace IV

Zvolíme-li si nějaký pevný bod O , pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky \overrightarrow{OA} s počátkem v O .

Interpretace IV

Zvolíme-li si nějaký pevný bod O , pak všechny vektory v rovině či v prostoru můžeme jednoznačně reprezentovat jako orientované úsečky \overrightarrow{OA} s počátkem v O .

Jejich koncem může být libovolný bod A roviny či prostoru, bod O nevyjímaje – orientovaná úsečka \overrightarrow{OO} totiž představuje tzv. nulový vektor.

Interpretace V

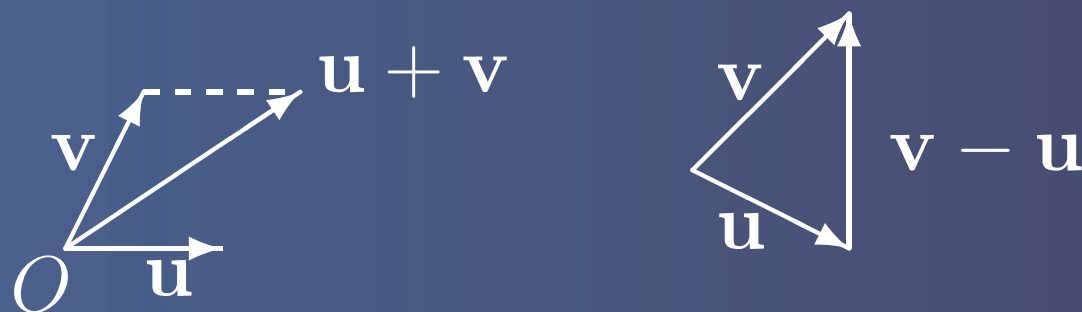
Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. ***vektorového rovnoběžníku***.

Interpretace \mathbf{V}

Vektory v rovině či v prostoru můžeme sčítat pomocí tzv. **vektorového rovnoběžníku**.

Součet vektorů $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$ je potom znázorněný orientovanou uhlopříčkou

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{OC}$ rovnoběžníka, jehož dvě přilehlé strany tvoří úsečky OA , OB .



Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

pokud $c \in \mathbb{R}$ a \mathbf{v} je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počátkem v O , jejíž délka je $|c|$ -násobkem délky úsečky \mathbf{v} , leží na té stejné přímce jako \mathbf{v} a je orientovaná souhlasně s \mathbf{v} , pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s \mathbf{v} , pokud $c < 0$

Interpretace VI

Vektory můžeme rovněž násobit libovolnými skaláry, t. j. v našem případě reálnými čísly:

pokud $c \in \mathbb{R}$ a \mathbf{v} je vektor, tak $c\mathbf{v}$ je vektor, t. j. orientovaná úsečka s počátkem v O , jejíž délka je $|c|$ -násobkem délky úsečky \mathbf{v} , leží na té stejné přímce jako \mathbf{v} a je orientovaná souhlasně s \mathbf{v} , pokud $c > 0$, resp. nesouhlasně s \mathbf{v} , pokud $c < 0$

(je-li $c = 0$ nebo \mathbf{v} je nulový vektor, tak, samozřejmě, i $c\mathbf{v}$ je nulový vektor, takže nezáleží na jeho směru ani orientaci).

Interpretace VII



Násobení vektoru skalárem

Interpretace VII

Pokud si mimo počátek O zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, t. j. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Interpretace VII

Pokud si mimo počátek O zvolíme v rovině či prostoru ještě dvě resp. tři souřadné osy, t. j. navzájem kolmé přímky procházející počátkem, a na každé z nich jeden bod ve stejné jednotkové vzdálenosti od počátku, dostaneme pravouhlý souřadnicový systém v rovině či v prostoru.

Každý bod roviny či prostoru je potom jednoznačně určený uspořádanou dvojicí, resp. trojicí svých souřadnic a naopak, každá dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký bod roviny či prostoru.

Interpretace VIII

Rovněž každý vektor v rovině či v prostoru je potom jednoznačně určený souřadnicemi svého koncového bodu a naopak libovolná uspořádaná dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký vektor v rovině či prostoru.

Interpretace VIII

Rovněž každý vektor v rovině či v prostoru je potom jednoznačně určený souřadnicemi svého koncového bodu a naopak libovolná uspořádaná dvojice resp. trojice souřadnic jednoznačně určuje nějaký vektor v rovině či prostoru.

Při pevném souřadnicovém systému tak můžeme množinu všech vektorů v rovině ztotožnit s množinou \mathbb{R}^2 a množinu všech vektorů v prostoru s množinou \mathbb{R}^3 .

Interpretace IX

Jsou-li (při takovémto ztotožnění)

$\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ dva

vektory v rovině, tak snadno ověříme, že pro

jejich součet $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, daný vektorovým

rovnoběžníkem, platí

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Interpretace X

Je-li $c \in \mathbb{R}$, pak pro skalární násobek $c\mathbf{u}$ dostáváme

$$c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2).$$

Podobně to můžeme ověřit pro vektory \mathbf{v} prostoru, t. j. uspořádané trojice reálných čísel.

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku O .

Interpretace XI

Navíc si všimněme, že předpoklady kolmosti souřadných os a rovnosti jednotkových délek v jednotlivých směrech nehrály v našich úvahách žádnou roli.

Stačí, aby systém souřadných os tvořily dvě různoběžné přímky (v rovině) resp. tři přímky neležící v rovině (v prostoru) protínající se v počátku O .

Za jednotkové délky ve směrech jednotlivých souřadných os můžeme zvolit délky libovolných (ne nutně stejně dlouhých) úseček.

Vektorové prostory I

1.6 Vektorové prostory

Bud' K (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem 0 a dvěma binárními operacemi –

Vektorové prostory I

1.5 Vektorové prostory

Bud' K (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem 0 a dvěma binárními operacemi –

sčítáním $+$: $V \times V \rightarrow V$ a

Vektorové prostory I

1.5 Vektorové prostory

Bud' K (číselné) těleso. **Vektorovým** nebo též **lineárním prostorem** nad K nazýváme množinu V s význačným prvkem 0 a dvěma binárními operacemi –

sčítáním $+$: $V \times V \rightarrow V$ a

násobením \cdot : $K \times V \rightarrow V$ – takovými, že platí

Vektorové prostory II

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V)(\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}),$$

$$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(\exists \mathbf{y} \in V)(\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{0}),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)(a \cdot (b \cdot \mathbf{x}) = (ab) \cdot \mathbf{x}),$$

$$(\forall \mathbf{x} \in V)(1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}),$$

$$(\forall a \in K)(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V)(a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (a \cdot \mathbf{x}) + (a \cdot \mathbf{y})),$$

$$(\forall a, b \in K)(\forall \mathbf{x} \in V)((a + b) \cdot \mathbf{x} = (a \cdot \mathbf{x}) + (b \cdot \mathbf{x})).$$

Vektorové prostory III

Skaláry značíme „obyčejnými“ malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Vektorové prostory III

Skaláry značíme „obyčejnými“ malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace.

Vektorové prostory III

Skaláry značíme „obyčejnými“ malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace.

Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme \cdot .

Vektorové prostory III

Skaláry značíme „obyčejnými“ malými latinskými písmeny a vektory tučnými malými latinskými písmeny.

Poznámka. I když sčítání skalárů v (číselném) tělese K a sčítání vektorů značíme stejným znakem $+$, jde o různé operace.

Podobně násobení v (číselném) tělese a násobení vektoru skalárem jsou různé operace, ačkoliv obě značíme \cdot .

Později budeme stejně značit příslušné operace a nuly v různých vektorových prostorech.

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K :

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $\mathbf{0} \in V$,

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $0 \in V$,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku „asociativity“, $1 \in K$ je její „neutrální prvek“

Vektorové prostory IV

Z formálního hlediska připomínají axiomy vektorového prostoru vlastnosti (číselného) tělesa K :

sčítání vektorů je opět asociativní a komutativní binární operace na V s neutrálním prvkem $0 \in V$,

operace násobení vektoru skalárem splňuje jakousi podmínku „asociativity“, $1 \in K$ je její „neutrální prvek“

a platí dva „distributivní zákony“.

Vektorové prostory V

Jeden podstatný rozdíl – násobení v (číselném) tělese K je binární operací na množině K , t. j. zobrazením $\cdot : K \times K \rightarrow K$, násobení ve vektorovém prostoru V nad číselným tělesem K není binární operace na V , ale binární operace $\cdot : K \times V \rightarrow V$.

Vektorové prostory VI

To nám však nebrání zavést obdobné dohody jako pro operace v (číselném) tělese: násobení má přednost před sčítáním a znak násobení budeme většinou vynechávat, t. j. budeme např. psát $a\mathbf{x} + \mathbf{y}$ namísto $(a \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{y}$.

Vektorové prostory VII

Rovněž budeme vynechávat závorky, jejichž umístění neovlivní výslednou hodnotu výrazů jako např. v $ab\mathbf{x}$ nebo $a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$.
Poslední výraz budeme taktéž značit

$$\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{x}_i$$

a nazývat ***lineární kombinací*** vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ s koeficienty a_1, \dots, a_n .

Vektorové prostory VIII

Speciálně pro $n = 1$ to znamená

$\sum_{i=1}^1 a_i \mathbf{x}_i = a_1 \mathbf{x}_1$; kvůli úplnosti pro $n = 0$ ještě klademe prázdnou lineární kombinaci

$\sum_{i=1}^0 a_i \mathbf{x}_i$ rovnou $\mathbf{0}$.

Tvrzení 1.5.0 *Necht' V je vektorový prostor nad (číselným) tělesem K . Pak pro libovolné $n \in \mathbb{N}$, $a, b, a_1, \dots, a_n \in K$ a $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in V$ platí*

Vektorové prostory IX

$$(a) \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{z} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{z},$$

$$(b) \quad (a\mathbf{x} = a\mathbf{y} \& a \neq 0) \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y},$$

$$(a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \& \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow a = b,$$

$$(c) \quad a\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\mathbf{x},$$

$$(d) \quad a\mathbf{x} = \mathbf{0} \Rightarrow (a = 0 \vee \mathbf{x} = \mathbf{0}),$$

Vektorové prostory X

$$(e) \quad -\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x},$$

$$(f) \quad a(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = a\mathbf{x} - a\mathbf{y},$$

$$(a - b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} - b\mathbf{x},$$

$$(g) \quad a(\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n) = a\mathbf{x}_1 + \dots + a\mathbf{x}_n,$$

$$(a_1 + \dots + a_n)\mathbf{x} = a_1\mathbf{x} + \dots + a_n\mathbf{x}.$$

Příklady I

1.6 Příklady vektorových prostorů

1.6.0 Rozšíření těles

Zřejmě každé těleso K můžeme považovat za vektorový prostor nad sebou samým. Obecněji, pokud těleso L je rozšířením tělesa K , tak L můžeme považovat za vektorový prostor nad tělesem K (formálně stačí „zapomenout“ na násobení některých dvojic prvků $a, b \in L$ a součin ab připustit jen pro $a \in K, b \in L$).

Příklady II

Podobným způsobem můžeme vektorový prostor V nad tělesem L zúžením násobení $L \times V \rightarrow V$ na násobení $K \times V \rightarrow V$ změnit na vektorový prostor nad tělesem K .

Příklady III

1.6.1 n -rozměrné řádkové a sloupcové vektory nad daným tělesem

Pro libovolné těleso K a $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$K^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_1, \dots, x_n \in K\}$$

všech uspořádaných n -tic prvků z K spolu s operacemi

Příklady IV

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),\end{aligned}$$

$$c\mathbf{x} = c(x_1, \dots, x_n) = (cx_1, \dots, cx_n),$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$,
 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in K^n$ a $c \in K$, vektorový
prostor nad tělesem K .

Příklady V

Zřejmě uspořádaná n -tice $\mathbf{0}_n = (0, \dots, 0)$ hraje úlohu nuly v K^n . Pokud bude potřebné rozlišit nulové vektory v prostorech K^n pro různá přirozená čísla n , budeme pro nulu v K^n používat označení $\mathbf{0}_n$. Opačný prvek k $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ je zřejmě

$$-\mathbf{x} = -(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n).$$

Příklady VI

Říkáme, že operace na K^n jsou definované **po složkách**. Prvky tohoto vektorového prostoru nazýváme **n -rozměrné řádkové vektory** nad tělesem K . Vektorový prostor K^0 sestává z jediného prvku \emptyset , představujícího „uspořádanou nultici“, která je nutně nulou v K^0 .

Příklady VII

Někdy bude výhodnější pracovat
s *n -rozměrnými sloupcovými vektory* nad
tělesem K , t. j. s vektory tvaru

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ kde } x_1, \dots, x_n \in K. \text{ Píšeme rovněž } K^n.$$

Příklady VIII

1.6.2 Polynomy nad daným tělesem

Polynomem nebo též *mnohočlenem* f stupně n , kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, v proměnné x nad tělesem K rozumíme formální výraz tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ &= \sum_{i=0}^n a_i x^i, \end{aligned}$$

Příklady IX

kde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in$ jsou skaláry, nazývané *koeficienty* polynomu f , a $a_n \neq 0$.

Nulu $0 \in K$ považujeme za polynom stupně -1 a nenulové skaláry $a \in K$ za polynomy stupně 0 . Zřejmě každý polynom f definuje (stejně označovanou) funkci $f : K \rightarrow K$ danou předpisem $c \mapsto f(c)$, t. j. dosazením konkrétních hodnot $c \in K$ za proměnnou x do polynomu f .

Příklady X

Množinu všech polynomů v proměnné x nad K stupně nejvýše n , kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, budeme značit $K^{(n)}[x]$; množinu všech polynomů v proměnné x nad K značíme $K[x]$.

Libovolný polynom $g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i \in K[x]$ stupně $m < n$ můžeme psát ve tvaru

$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m + 0x^{m+1} + \dots + 0x^n,$$

t. j. v tvaru $g(x) = \sum_{i=0}^n b_i x^i$, kde $b_i = 0$ pro $m < i \leq n$.

Příklady XI

S použitím této konvence lze definovat součet

$$f + g \text{ polynomů } f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

z $K[x]$ předpisem

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) x^i.$$

Příklady XII

Pokud navíc $c \in K$, klademe

$$(cf)(x) = cf(x) = \sum_{i=0}^n ca_i x^i.$$

Snadno ověříme, že s takto po složkách definovanými operacemi součtu a skalárního násobku tvoří každá z množin polynomů $K^{(n)}[x]$, kde $-1 \leq n \in \mathbb{Z}$, a zároveň i množina všech polynomů $K[x]$ vektorový prostor nad tělesem K .