Demonstrované cvičení k přednášce Matematika I

25.4.2006

Příklad 1. *Zjistěte, jaké zobrazení zadává následující matice:*

$$\begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 & -1/3 \\ -1/6 & 5/6 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení. Promítání na rovinu kolmou na vektor $(1, 1, 2)$. $\square$

Příklad 2. *Zjistěte, jaké zobrazení zadává následující matice:*

$$\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Řešení. Zrcadlení podle roviny kolmé na vektor $(1, 1, 2)$. $\square$

Příklad 3. *Napište Leslieho matici pro model množení králíků z příkladu* **1.36.**, *uvažujeme-li, že králíci umírají s dovršením třetího měsíce věku. Charakterizujte populaci na základě vlastností této matice.*

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Příklad 4. *Uvažujme následující populaci nezmarů, kteří se dožívají tří měsíců. Každý nezmar splodí mezi prvním a druhým měsícem života tři nezmárky, stejně tak mezi druhým a třetím měsícem života. Nezmaři stáří do jednoho měsíce neplodí. Třetina nezmarů po dovršení druhého měsíce života umírá, po dovršení třetího měsíce umírají všichni.*

Napište Leslieho matici modelu růstu této populace a zjistěte, na jakém poměru mezi jednotlivými věkovými skupinami se populace ustálí. Na jaké hodnotě se ustálí přírustek populace?

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Jediná kladná vlastní hodnota je 2, odpovídající vlastní vektor $(6, 3, 1)$, poměr mezi jednotlivými skupinami se tedy ustálí na hodnotě $6 : 3 : 1$. $\square$

Příklad 5. *Uvažujme komplexní polynomy stupně nejvýše* k *(tj. funkce tvaru* $a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0 \ldots k$*) s operací sčítání funkcí. Ukažte, že jde o vektorový prostor nad reálnými čísly a napište nějakou jeho bazi. Jaká je jeho dimenze?*

Řešení. dimenze je $2k + 2$. □

Příklad 6. *Rozhodněte o následujících tvrzeních, jestli jsou pravdivá, či nepravdivá. Buď je dokažte nebo vyvraťte protipříkladem.*

1. *Každá čtvercová matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ má právě n reálných vlastních hodnot (každá je počítána tolikrát, jaká je její násobnost).*

2. *Reálná čtvercová matice $n \times n$ nad $\mathbb{R}$ může mít komplexní vlastní hodnotu.*

3. *Komplexní čtvercová matice $n \times n$ může mít pouze reálné vlastní hodnoty.*

Řešení.

1. Ne. Skoro každá matice je protipříkladem.
2. Ano.
3. Ano.

$\square$

Příklad 7. *Hráč rulety má následující strategii: přišel hrát se* 100 *Kč. Vždy všechno, co aktuálně má. Sází vždy na černou (v ruletě je* 37 *čísel, z toho je* 18 *černých,* 18 *červených a nula). Hráč skončí, pokud nic nemá, nebo pokud získá* 800 *Kč. Zformulujte tuto úlohu jako Markovův proces a napište jeho matici.*

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \end{pmatrix},$$

kde $a = \frac{19}{37}$ a $b = \frac{18}{37}$. □

Příklad 8. *Uvažujme situaci z předchozího případu a předpokládejme, že pravděpodobnost výhry i prohry je* $1/2$*. Označme matici procesu* A*. Bez použití výpočetního software určete* A^{100}*.*

Řešení. Hra skončí po třech sázkách. Jsou tedy všechny mocniny A, počínaje A^3 shodné.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/8 & 3/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Příklad 9. *Je dáno lineární zobrazení* $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *ve standardní bázi následující maticí:*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište matici tohoto zobrazení v bázi

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,1,0) \\ e_2 &= (0,1,1) \\ e_3 &= (0,0,1). \end{aligned}$$

Příklad 10. *Řešte následující diferenční rovnici:*

$$x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+2} + x_{n+1} - x_n.$$