Demonstrované cvičení, Matematika I

21.2.2006

Diferenční rovnice

Opakování matka moudrosti

Diferenční rovnicí rozumíme přepis pro členy posloupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ tvaru:

$$x_{n+k} = f\left(x_{n+k-1}, \ldots, x_n\right),$$

kde f je funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Typy diferenčních rovnic:

- homogenní
- nehomogenní

- lineární
- nelineární

- prvního řádu
- vyšších řádů

- s konstantními koeficienty
- s nekostantními koeficienty

Metody řešení: Uvedeme metody řešení pouze pro některé typy diferenčních rovnic.

1. Pro rovnice prvního řádu je řešení dáno následovně: n-tý člen posloupnosti $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ zadané rekurentně

   $$y(n+1) = a(n)y(n) + g(n), \quad n \geq 1$$

   spočítáme jako

   $$y(n) = \left[\prod_{i=0}^{n-1} a(i)\right] y_0 + \sum_{r=0}^{n-1} \left[\prod_{i=r+1}^{n-1} a(i)\right] g(r).$$

2. Lineární homogenní diferenční rovnice s konstatními koeficienty. Množina řešení je vektorový prostor. Jeho báze je dána posloupnostmi $\{\lambda_i^n\}_{i=1}^{\infty}$, pro jednoduché kořeny charakteristického polynomu, resp. $\{k^t \lambda_i^n\}_{i=1}^{\infty}$, $1 \leq t \leq (s-1)$, pro s-násobné kořeny charakteristického polynomu.

3. Lineární nehomogenní diferenční rovnice s konstantními koeficienty. Množina řešení je afinní prostor, jehož zaměřením je vektorový prostor řešení zhomogenizované rovnice. Jedno řešení určíme metodou neurčitých koeficientů.