

Demonstované cvičení, Matematika I, 28.2.2006

Příklad 1. *Kolik peněz naspořím na stavebním spoření za pět a za deset let, vkládám-li 2000 Kč měsíčně, vklad je úročen roční úrokovou mírou 3% (úročení probíhá jednou za rok) a od státu obdržím ročně příspěvek 1500 Kč? (státní příspěvek se připisuje vždy až následující rok)*

Řešení. Označme x_n sumu našetřených peněz po uplynutí n -tého roku. Pro x_n sestavíme rekurentní formuli:

$$x_n = 1,03(x_{n-1} + 24000) + 1500 = 1,03 \cdot x_{n-1} + 1,03 \cdot 24000 + 1500 = 1,03 \cdot x_{n-1} + 26220.$$

Podle vztahu uvedeného jak na přednášce, tak na demonstrováných cvičeních je

$$x_n = 26220 \sum_{i=0}^{n-1} (1,03)^i = 26220 \cdot \frac{1,03^n - 1}{0,03}$$

Dosazením pak $x_5 \doteq 139206$ Kč a $x_{10} \doteq 300583$ Kč. □

Příklad 2. *Kolik můžeme vytvořit různých znaků základního Breilova písma (znak spočívá ve zvýraznění nějakých bodů v obdélníkovém schématu 2×3). Uvažujeme i znaky, které nedávají smysl.*

Řešení. $2^6 = 64$.

□

Příklad 3. Určete koeficient u členu $x_1x_2^2x_3^4$ polynomu (o třech neznámých) $(2x_1 + 3x_2 + 4x_3)^7$.

Řešení. Permutace s opakováním. $\frac{7!}{2!4!}2 \cdot 3^2 \cdot 4^4$. □

Příklad 4. Na kolik nejvýše částí dělí rovinu n -čtverců?

Řešení. Pro počet x_n odvodíme rekurentní formuli $x_n = x_{n-1} + 8(n - 1)$, $n \geq 2$. Protože $x_1 = 2$, tak

$$x_n = 8\left(\sum_{i=1}^{n-1} i\right) + 2 = 4n(n - 1) + 2.$$

□

Příklad 5. Pro libovolné pevné $n \in \mathbb{N}$ určete počet všech řešení rovnice

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n$$

v množině přirozených čísel.

Příklad 6. *V klobouku je šest bílých a pět černých koulí. Vytahujeme koule bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že druhá vytažená koule bude bílá. Jaká je pravděpodobnost, že n -tá ($1 \leq n \leq 11$) vytažená koule bude bílá?*

Příklad 7. *V klobouku je šest bílých a pět černých koulí. Vytahujeme koule bez vracení. Jaká je pravděpodobnost, že třetí vytažená koule bude bílá za předpokladu, že druhá vytažená koule byla černá? Jsou tyto jevy závislé či nezávislé?*

Příklad 4. Na jisté internetové stránce probíhá hlasování o nejlepšího hokejistu světa uplynulého desetiletí. Počet hlasů pro jednotlivé hráče je uváděn v procentech a to zaokrouhleně na celá procenta. Poté, co odevzdal svému favoritovi hlas i Mirek, se na procentuálním zisku 13% hlasů pro Jaromíra Jágra nic nezměnilo. Kolik minimálně lidí (včetně Mirka) se volby účastnilo?