Demonstrované cvičení k přednášce Matematika I

4.4.2006

Příklad *Napište matici zobrazení rotací o úhel φ postupně kolem os x, y, z v $\mathbb{R}^3$.*

Příklad *Napište matici zobrazení rotace o úhel* 60° *kolem přímky dané počátkem a vektorem* $[1, 0, 1]$ *v* $\mathbb{R}^3$.

Příklad *Obecně můžeme psát matici otočení (v kladném smyslu) o úhel* φ *kolem jednotkového vektoru* (x, y, z)*:*

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi + (1-\cos\varphi)x^2 & (1-\cos\varphi)xy - (sin\varphi)z & (1-\cos\varphi)xz + (\sin\varphi)y \\ (1-\cos\varphi)yx + (\sin\varphi)z & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)y^2 & (1-cos\varphi)yz - (\sin\varphi)x \\ (1-\cos\varphi)zx - (\sin\varphi)y & (1-\cos\varphi)zy + (\sin\varphi)x & \cos\varphi + (1-\cos\varphi)z^2 \end{pmatrix}$$

Příklad *Napište matici zobrazení projekce do roviny procházející počátkem a kolmé na vektor* $(1, 1, 1)$.

Příklad Leslieho růstový model. *Uvažujme následující model vývoje lidské populace. Buď*

- $x_1(t) =$ *počet jedinců starých* $0 - 14$ *let.*
- $x_2(t) =$ *počet jedinců starých* $15 - 29$ *let.*
- $x_3(t) =$ *počet jedinců starých* $30 - 44$ *let.*
- $x_4(t) =$ *počet jedinců starých* $45 - 59$ *let.*
- $x_5(t) =$ *počet jedinců starých* $60 - 75$ *let.*

Vše uvedeno v nějakém čase t*. Pokud uvážíme časovou jednotku* 15 *let, tak v čase* $(t+1)$ *budeme mít následující počty:*

$$\begin{array}{lcccccccccc}
x_1(t+1) & = & f_1x_1(t) & + & f_2x_2(t) & + & f_3x_3(t) & + & f_4x_4(t) & + & f_5x_5(t) \\
x_2(t+1) & = & \tau_{1,2}x_1(t) & & & & & & & & \\
x_3(t+1) & = & & & \tau_{2,3}x_2(t) & & & & & & \\
x_4(t+1) & = & & & & & \tau_{3,4}x_3(t) & & & & \\
x_5(t+1) & = & & & & & & & \tau_{4,5}x_4(t) & &
\end{array}$$

Pokud označíme jako P *následující matici*

$$P := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2,3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5} & 0 \end{pmatrix},$$

tak v maticové formě pak můžeme psát

$$\mathbf{x}(t+1) = P\mathbf{x}(t),$$

kde $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t))$.

Příklad Usherův model růstu. *Variace předchozího. Mějme populaci jako v předchozím příkladě a uvažujme časovou jednotku* $7,5$ *let, tedy polovinu předchozí. Pak můžeme psát opět*

$$\mathbf{x}(t+1) = P\mathbf{x}(t),$$

kde ovšem nyní

$$P := \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \tau_{1,2} & \tau_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{2,3} & \tau_{3,3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{3,4} & \tau_{4,4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_{4,5} & \tau_{5,5} \end{pmatrix}.$$