Demonstrované cvičení k přednášce Matematika II

21.2.2006

Co bych měl vědět o polynomech

- (Základní věta algebry) Každý polynom s koeficienty v $\mathbb{C}$ má kořen v $\mathbb{C}$.
- Ne každý polynom s reálnými koeficienty má kořen v $\mathbb{R}$.
- Pomocí Hornerova schematu umíme dělit polynom lineárním mnohočlenem $(x - a)$ a při tom zjistíme hodnotu polynomu v bodě a.
- Polynom stupně n je zadán svými hodnotami v $(n + 1)$ bodech.
- Máme-li zadáno $(n + 1)$ dvojic (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, pak pro každé $m > n$ existuje nekonečně mnoho polynomů P stupně m takových, že $P(x_i) = y_i$.

Příklad 1. *Určete Lagrangeův polynom L zadaný následujícími podmínkami:* $L(1) = 1$, $L(2) = 3$, $L(5) = 2$.

Příklad 2. *Určete Hermiteův interpolační polynom H zadaný následujícími podmínkami:*

$$H(1) = 1, \quad H(2) = 0, \quad H'(1) = 4, \quad H'(2) = 1$$

Hermiteův polynom můžeme určit podobně pomocí fundamentálních Hermiteových polynomů:

$$\begin{aligned} h_i^1(x) &= \left[1 - \frac{l''(x_i)}{l'(x_i)}(x - x_i)\right] (l_i(x))^2 \\ h_i^2(x) &= (x - x_i)\,(l_i(x))^2\,, \end{aligned}$$

kde $l(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ Tyto polynomy splňují následující podmínky:

$$\begin{aligned} h_i^1(x_j) &= \delta_i^j \\ (h_i^1)'(x_j) &= 0 \\ h_i^2(x_j) &= 0 \\ (h_i^2)'(x_j) &= \delta_i^j \end{aligned}$$

Příklad 3. *Sečtěte následující řadu:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \cdots ,$$

kde řada kombinačních čísel pokračuje, dokud mají tato smysl.