Demonstrované cvičení k přednášce Matematika II

28.2.2006

Příklad 1. *Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:*

$$P(2) = 1,\ P(3) = 0,\ P(4) = -1,\ P(5) = 6.$$

Řešení. Řešíme buď přímo nebo pomocí fundamentálních Lagrangeových polynomů (viz přednáška). Je dobré je na tabuli napsat.

$$P(x) = \frac{4}{3}z^3 - 12z^2 + \frac{101}{3}z - 29.$$

□

Příklad 2. *Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:*

$$P(1+i) = i,\ P(2) = 1,\ P(3) = -i.$$

Řešení. $P(x) = (-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i)x^2 + (2+3i)x - \frac{3}{5} - \frac{14}{5}i.$ $\square$

Příklad 3. *Nalezněte polynom P splňující následující podmínky:*

$$P(1) = 0, P'(1) = 1, P(2) = 3, P'(2) = 3.$$

Řešení. Nejvhodnější je použít přepočítaný polynom ze skript. Opět zkuste napsat fundamentální Hermiteovy polynomy (viz demontstr. cvičení). $P(x) = -2x^3 + 10x^2 - 13x + 5$. $\square$

Příklad 4. *Pro $n \in \mathbb{N}$ sečtěte řadu*

$$S = \binom{n}{0} + \binom{n}{5} + \binom{n}{10} + \cdots$$

kde řada pokračuje dokud mají vypisovaná kombinační čísla smysl (dole je menší číslo než nahoře).

Řešení. Označme $\varepsilon := \cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)$. Pak $\varepsilon^5 = 1$. Uvažme následujících pět rovností

$$\begin{aligned}
(1+1)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} \\
(1+\varepsilon)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^1 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^n \\
(1+\varepsilon^2)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^2 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^{2n} \\
(1+\varepsilon^3)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^3 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^{3n} \\
(1+\varepsilon^4)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\varepsilon^4 + \cdots + \binom{n}{n}\varepsilon^{4n}
\end{aligned}$$

Protože $1 + \varepsilon^t + \varepsilon^{2t} + \varepsilon^{3t} + \varepsilon^{4t} = \frac{\varepsilon^5-1}{\varepsilon^t-1} = 0$ pro čísla nedělitelná pěti, pro čísla dělitelná pěti je tento součet 5. Sečtením daných pěti binomických rozvojů tedy dostaneme:

$$\left[(1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n + (1+\varepsilon^3)^n + (1+\varepsilon^4)^n\right] = 5S,$$

Využitím toho, že $(1+\varepsilon) = \sqrt{2+2\cos(2\pi/5)}(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5)) = 2\cos(\pi/5)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))$ (dokreslením kosočtverce v Gausově rovině; vrcholy $0,1,\varepsilon,1+\varepsilon$). Obdobně $(1+\varepsilon^2) = \sqrt{2+2\cos(4\pi/5)}(\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5)) = 2\cos(2\pi/5))(\cos(2\pi/5) + i\sin(2\pi/5))$. Užitím Moivreovy věty pak

$$S = \frac{1}{5}2^{n+1}\left\{\frac{1}{2} + [\cos(\pi/5)]^n\cos(n\pi/5) + [\cos(2\pi/5)]^n\cos(2n\pi/5)\right\}.$$

$\square$

Příklad 5. *Buď $A \subset \mathbb{R}$ a s buď dolní závorou A. Pak jsou následující výroky ekvivalentní:*

- $s = \inf A$
- $(\forall \varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$, $(\exists x \in A)$: $s + \varepsilon > x$.

Příklad 6. *Určete hromadné, hraniční, izolované a vnitřní body následující podmnožiny v $\mathbb{R}$:*

$$\left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Příklad 7. *Definujme následující funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \textit{jestliže } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p \textit{ a } q \textit{ nesoudělná} \\ 0 & \textit{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Určete, ve kterých bodech je f spojitá.