Demonstrované cvičení k přednášce Matematika II

7.3.2006

Příklad 1. *Načrtněte následující podmnožiny v* $\mathbb{C}$

1. $\{z \in \mathbb{C} |\, |z-1| = |z+1|\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} |\, 1 \leq |z-i| \leq 2\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(z^2) = 1\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} |\, \mathrm{Re}(\frac{1}{z}) < \frac{1}{2}\}$

Řešení.

- imaginární osa
- mezikruží okolo i
- hyperbola $a^2 - b^2 = 1$.
- vnějšek jednotkového kruhu se středem v 1.

$\square$

Příklad 2. *Určete hromadné, izolované, hraniční a vnitřní body následujících podmnožin v $\mathbb{R}$:*

1. $\mathbb{N}$

2. $\mathbb{Q}$

3. $\{x \in \mathbb{R} |\, 0 \leq x < 1\}$.

Svá tvrzení zdůvodněte.

Řešení.

1. $\emptyset$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$, $\emptyset$
2. $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $\mathbb{Q}$, $\emptyset$
3. $\langle 0, 1\rangle$, $\emptyset$, 0, $(0, 1)$

$\square$

Příklad 3. *Udejte příklad podmnožiny v $\mathbb{R}$, která*

1. *není ani otervřená ani uzavřená*
2. *je uzavřená, ale není kompaktní*

Příklad 4. *Buď* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definována následovně:*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{jestliže } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \textit{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Určete, ve kterých bodech je f *spojitá. Zdůvodněte.*

Řešení. Pouze v bodě 0. $\square$

Příklad 5. *Definujme následující funkci* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \textit{jestliže } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ p \textit{ a } q \textit{ nesoudělná} \\ 0 & \textit{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Určete, ve kterých bodech je f *spojitá.*

Věta o třech limitách. Buď f, g, h reálné funkce takové, že existuje okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$, kde platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Pak pokud existují limity $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f_0$ a $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = h_0$ a navíc $f_0 = h_0$, pak také existuje limita $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g_0$ a platí $g_0 = f_0 = h_0$.

Důkaz. Z definice limity, pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje okolí U bodu x_0, ve kterém je $f(x), h(x) \in (g_0 - \varepsilon, g_0 + \varepsilon)$. z podmínky $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ vyplývá, že i $g(x) \in (g_0 - \varepsilon, g_0 + \varepsilon)$, tedy $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g_0$.

Příklad 6. *Ukažte, že pro libovolné reálné* $c > 0$ *je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

Příklad 7. *Určete intervaly monotónnosti polynomu* $x^3 - x^2 - x + 1$ *a načrtněte jeho graf.*