

**Demonstované cvičení k přednášce Matematika II**  
14.3.2006

**Příklad 1.** Spočítejte následující limity posloupností (pomocí pravidel uvedených na přednášce a demonstrovaných cvičeních):

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{n+1},$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+n+1},$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2+3n+1},$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 4n^2,$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4n^2 + n} - 2n.$

**Řešení.**

1.  $\infty.$

2.  $\frac{2}{3}.$

3.  $0.$

4.  $-\infty.$

□

**Příklad 2.** *Dokažte:*

1. *Pro libovolné  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq k$  platí:*

$$n! \geq \frac{k!}{k^k} k^n.$$

2. *S využitím toho, že pro libovolné  $c > 0$  platí  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1$  dokažte, že*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

**Příklad 3.** Z definice derivace ukažte, že pro derivaci polynomu platí

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x_1 + a_0 = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1.$$

**Řešení.** Využijte linearity derivace a dokažte pro jednotlivé monomy. □

**Příklad 4.** Zderivujte následující funkce. Výsledek napište v co nejjednodušším tvaru.

1.  $\frac{x^2-x}{x^3-1}$ ,

2.  $\frac{x^3-7x^2+17x-10}{x^2-3x+2}$ .

**Řešení.**

1.  $\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$ .

2. 1.

□

**Příklad 5.** *Určete kořeny polynomu  $4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1$ .*

**Příklad 6.** Ukažte, že tzv. *harmonická řada*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$$

*diverguje.*