Demonstrované cvičení k přednášce Matematika II

21.3.2006

Příklad 1. *Udejte příklad funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je na celém $\mathbb{R}$ hladká, pouze v jednom bodě je jenom dvakrát diferencovatelná.*

Řešení. Např. f je tvořena po částech dvěma kubickými polynomy (viz splajny).
$\square$

Příklad 2. *Udejte příklad hladké funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která je globálně invertovatelná a přitom f^{-1} není všude na svém definičním oboru diferencovatelná.*

Řešení. Libovolná invertovatelná fce, která má někde nulovou derivaci (např x^3).
$\square$

Příklad 3. *Určete kořeny polynomu* $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$.

Řešení. Ukažte nejprve, že polynom nemá racionální kořeny. Společný faktor s derivací je polynom $(x^2 - x + 2)$ (připomeňte Eukleidův algoritmus) a každý jeho kořen je tedy dvojnásobným kořenem $P(x)$. Tyto kořeny jsou $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{7}$. $\square$

Příklad 4. *Zderivujte následující funkce.*

1. x^x,

2. x^{x^x},

3. $\frac{e^x}{x}$.

Řešení.

1. $x^x(\ln x + 1)$,
2. $x^{x^x}\left\{x^{(x-1)} + \ln x\left[x^x(\ln x + 1)\right]\right\}$,
3. $\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}$.

$\square$

Příklad 5. *Určete derivaci funkcí* $\arcsin(x)$ *a* $\arctan(x)$.

Leibnitzovo kriterium konvergence. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Pak **alternující řada** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ konverguje.

Důsledek. Alternující harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konverguje.

L'Hospitalovo pravidlo.

Příklad 6. *Rozhodněte o následujících řadách, jestli konvergují či divergují:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^{100000}}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$

Příklad 7. *Určete poloměr konvergence následujících mocninných řad:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^n$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} x^n$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} x^n$