Příklad 1. *Vyšetřete průběh funkce (***mimo jiné** *najít extrémy, inflexní body, asymptoty).*

$$\ln(x^2 - 3x + 2) + x.$$

Řešení. Def. obor $\mathbb{R} \setminus \langle 1, 2\rangle$. Lokální maximum $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, na celém def. oboru konkávní, asymptoty $x = 1$, $x = 2$. □

Příklad 2. *Určete povrch a objem rotačního paraboloidu, který vznikne rotací části paraboly $y = 2x^2$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$ kolem osy y.*

Řešení. Vzorce z přednášek platí pro rotaci křivek kolem osy x! Je tedy nutno buď integrovat podle danou křivku neznámé y, nebo transformovat.

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi \\ S &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2}}\Big(\sqrt{1 + \frac{1}{8x}}\Big)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^2 \sqrt{\frac{x}{2} + \frac{1}{16}}\,\mathrm{d}x = \pi\frac{17\sqrt{17} - 1}{24}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

Příklad 3. *Ve čase $t = 0$ se začaly pohybovat tři body P, Q, R v rovině a to bod P z bodu $[-2, 1]$ směrem $(3, 1)$, rovnoměrnou rychlostí $\sqrt{10}\,m/s$, bod Q z bodu $[0, 0]$ směrem $(-1, 1)$ rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením $2\sqrt{2}\,m/s^2$ a bod R z bodu $[0, 1]$ směrem $(1, 0)$ rovnoměrnou rychlostí $2\,m/s$. V jakém čase bude obsah trojúhelníku PQR minimální?*

Řešení. Rovnice bodů P, Q, R v čase jsou

$$\begin{aligned} P &: [-2, 1] + (3, 1)t \\ Q &: [0, 0] + (-1, 1)t^2 \\ R &: [0, 1] + (2, 0)t \end{aligned}$$

Obsah trojúhelníka PQR je určený např. polovinou absolutní hodnoty determinantu, jehož řádky jsou souřadnice vektorů PQ a QR (viz Matematika I). Minimalizujeme tedy determinant:

$$\begin{vmatrix} -2 + t & t \\ -t^2 - 2t & -1 + t^2 \end{vmatrix} = 2t^3 - t + 2.$$

Derivace je $6t^2 - 1$, extrémy tedy nastávají pro $t = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$, vzhledem k tomu, že uvažujeme pouze nezáporný čas, vyšetřujeme pouze $t = \frac{1}{\sqrt{6}}$, jde o minimum, navíc je hodnota determinantu v tomto bodě kladná a menší, než hodnota v bodě 0 (krajní bod intervalu, na kterém hledáme extrém), je tedy o globální minimum obsahu v čase. □

Příklad 4. *Spočtěte určitý integrál*

$$\int_3^\infty \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Počítáme metodou rozkladu na parciální zlomky. Polynom ve jmenovateli má kořen 2, snadno jej tedy rozložíme na součin $(x^2 - x + 1)(x - 2)$,.... $-\frac{1}{6}\sqrt{3}\pi + \frac{1}{6}\ln(7) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{5\sqrt{3}}{3})$. □

Příklad 5.

1. *Co je to poloměr konvergence mocninné řady (jako funkce $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$)? Jak jej spočítáme?*
2. *Definujte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí.*
3. *Rozhodněte o funkčních řadě $\{e^{nx}\}_{n=1}^{\infty}$, zda bodově konverguje na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ k nějaké funkci. Pokud ano, rozhodněte je-li tato konvergence stejnoměrná. Svá rozhodnutí zdůvodněte.*