Příklad 1. *Určete parametr $c \in \mathbb{R}$ tak, aby tečna ke grafu funkce $\frac{ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě $[1, 0]$ procházela bodem $[2, 2]$.*

Řešení. Podle zadání má mít tečna směrnici 2 ($\frac{2-0}{2-1}$). Směrnice je určena derivací funkce v daném bodě, dostáváme tedy podmínku

$$\frac{2 - \ln(cx)}{2\sqrt{x}}(1) = 2, \text{ neboli } 2 - \ln(c) = 4,$$

tedy $c = \frac{1}{e^2}$. Pro $c = \frac{1}{e^2}$ je však hodnota fce $\frac{ln(c \cdot x)}{\sqrt{x}}$ v bodě 1 rovna -2. Tedy žádné takové c neexistuje. □

Příklad 2. *Vyšetřete průběh funkce $\frac{\ln(x)}{x}$ (tj.* **mimo jiné** *najít extrémy, inflexní body, asymptoty) a načrtněte její graf.*

Řešení. Def. obor $\mathbb{R}^+$, globální maximum $x = e$, infl. bod $x = \sqrt{e^3}$, rostoucí na int $(0, e)$, klesající na (e, ∞), konkávní $(0, \sqrt{e^3}$, konvexní $(\sqrt{e^3}, \infty)$, asymptoty $x = 0$ a $y = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. □

Příklad 3. *Rozviňte funkci* $\ln(1 + x)$ *do mocninné řady v bodech* 0 *a* 1 *a určete* **všechna** $x \in \mathbb{R}$*, pro která tyto řady konvergují.*

Řešení. Rozvinout funkci do mocninné řady v daném bodě je to stejné, jako určit její Taylorův rovoj v daném bodě.

$$\begin{aligned} \ln(x+1) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \\ &= \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{3 \cdot 2^3}(x-1)^3 - \frac{1}{4 \cdot 2^4}(x-1)^4 + \dots \end{aligned}$$

První řada konverguje pro $-1 < x \leq 1$, druhá pro $-1 < x \leq 3$. □

Příklad 4. *Spočtěte neurčitý integrál*

$$\int \frac{1}{x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2} \,\mathrm{d}x.$$

Řešení. $\frac{1}{2}\ln(x^2 + 2 * x + 2) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{(2*x+1)\sqrt{3}}{3}\right) + C.$ □

Příklad 5.

1. *Definujte pojem „spojitá funkce“.*
2. *Definujte pojem konvergence nekonečné řady.*
3. *Sformulujte L'Hospitalovo pravidlo pro počítání limit funkcí.*