KOMBINATORIKA

Cíle: 1. Ovládat pojmy faktoriál, kombinační číslo, umět aktivně využít vlastností kombinačních čísel, Pascalův trojúhelník včetně příslušné terminologie a symboliky.

2. Chápat správně pojmy variace, permutace, kombinace a to bez opakování i s opakováním. Aktivně ovládat vzorce pro počty těchto skupin.

3. Umět řešit kombinatorické úlohy včetně užití kombinatorických pravidel součtu a součinu.

4. Aktivně ovládat binomickou větu.

Podnět pro kombinatorické úvahy byly v 17. století různé hry s kostkami a hry karetní. Jednalo se o určení pravděpodobnosti výhry.
Dnes je součástí finitní matematiky, která sleduje vlastnosti konečných množin.
Nelze ověřit výsledek, práce v množině přirozených čísel /kromě nuly/.

„Kolika způsoby lze vybrat, seřadit, uspořádat jisté objekty?“ Takové úlohy se kombinatorika snaží roztřídit do skupin či typů a pro každý typ úlohy formuluje obecnou metodu řešení – například v podobě vzorce.

Motivační úloha: Určete počet přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá, vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: na místě desítek se vyskytují postupně cifry 1 – 9 , ke každé z nich lze z množiny 0 , 1 , 2 …………9 vytvořit všechna dvojciferná čísla tak , že se cifry neopakují

1 krát 9 zbývajících
2 krát 9 zbývajících
3 krát 9 zbývajících
atd.

celkem tedy vytvořím 9 . 9 = 81 čísel

Aniž si uvědomujeme použili jsme k řešení první z kombinatorických pravidel – **pravidlo součinu.**

KOMBINATORICKÁ PRAVIDLA

Předcházející jednoduchá úloha vede k zavedení **kombinatorického pravidla součinu:**

Předpokládejme, že máme vybrat dva prvky a,b přičemž vybíráme první z konečné neprázdné množiny A a druhý z konečné neprázdné množiny B. V případě, že výběr prvku b je nezávislý na výběru prvku a, je celkem A . B možností, jak vybrat tyto prvky.

Jedná se tedy o počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby po výběru prvního, ………, každý k-tý člen n_1 , n_2 ,…,n_k způsoby po výběru (k – 1) ho členu.Tento počet je roven součinu $\mathbf{n_1 \,.\, n_2 \,.\, \ldots .n_k}$

Kombinatorickým pravidlem součinu lze řešit většinu kombinatorických úloh, řešení je však zdlouhavé.

Jestliže je úkolem zjistit počet prvků nějaké množiny M, můžeme množinu M rozložit na několik disjunktních podmnožin , $M = M_1 + M_2 + \ldots\ldots + M_k$, a určit počty prvků množin Mj. Tím je zavedeno **kombinatorické pravidlo součtu**.

Tento počet je roven $|M| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + \ldots\ldots + |M_k|$

Pro řešení úloh nejen těmito pravidly je nutné definovat nejzákladnější pojem kombinatoriky a to **faktoriál**.

Faktoriál čísla n je součin přirozených čísel 1 až n a značíme jej vykřičníkem za daným číslem , obecně n!.

Matematicky to nejsnáze zapíšeme jaksi odzadu, tedy takto :

$$\mathbf{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1}$$

Nula není přirozené číslo, ale pokud jsme nuceni vyjádřit v některém vztahu 0! , definujeme ji jako 1. Přitom chceme- li faktoriál rozložit jen částečně, můžeme kdykoli přestat a poslední člen zase považovat za faktoriál tedy, např.:

$$n! = n(n-1)(n-2)!$$

Na základě toho je možné určit faktoriál složitějších příkladů.

1. Rozložte $(n+1)!$
   Např. $(n+1)! = (n+1)(n)(n-1)(n-2)!$

2. Dokažte , že platí $(n+1)! - n! = n \,.\, n!$
   Řešení : provedeme rozklad $(n+1)!$

$$(n+1).n! - n! = n.n!$$

vlevo vytkneme n!

$$n!.(n+1-1) = n.n!$$

po úpravě dostáváme

$$n.n! = n.n!$$

Je důležité si zapamatovat, že **faktoriál je pouze symbol**, který sám o sobě nelze ani vytknout ani vykrátit, zrovna tak jako s ním nelze například roznásobit závorku.

Při výskytu faktoriálů ve zlomku rozvádíme větší výraz tak dlouho, dokud se neobjeví dva stejné výrazy v čitateli i ve jmenovateli, které pak můžeme vykrátit. Sledujte úpravy následujících zlomků.

$$1)\ \frac{28!+29!}{30!}=\frac{28!+29*28!}{30*29*28!}=\frac{28!(1+29)}{30*29*28!}=\frac{28!*30}{30*29*28!}=\underline{\frac{1}{29}}$$

$$2)\ \frac{(n+4)!}{(n+2)!}=\frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{(n+2)!}=\underline{\underline{(n+4)(n+3)}};n+2\geq 0\ ;(0!=1)$$

$$n\geq -2\Rightarrow n\in N$$

$$3)\ \frac{n}{(n-3)!}-\frac{1}{(n-4)!}=\frac{n}{(n-3)(n-4)!}-\frac{1}{(n-4)!}=\frac{n-(n-3)}{(n-3)(n-4)!}=\frac{n-n+3}{(n-3)(n-4)!}=$$

$$\underline{\frac{3}{(n-3)!}};n\geq 4,n\in N$$

$$4)\ \frac{(n+5)!}{(n+3)!}-2\frac{(n+4)!}{(n+2)!}+\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=\frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!}-2\frac{(n+4)(n+3)(n+2)!}{(n+2)!}$$

$$+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+1)!}=(n+5)(n+4)-2(n+4)(n+3)+(n+3)(n+2)=$$

$$=n^2+9n+20-2(n^2+7n+12)+n^2+5n+6=n^2+9n+20-2n^2-14n-27$$

$$+n^2+5n+6=0n^2+0n+2=\underline{2};n\geq -3\wedge n\geq -2\wedge n\geq -1,n\in N$$

$$5)\ \frac{(3n-2)!}{(3n-3)!}=\frac{(3n-2)(3n-3)!}{(3n-3)!}=\underline{\underline{3n-2}};3n-3\geq 0$$

$$3n\geq 3$$

$$n\geq 1,n\in N$$

Procvičte si :

1. V četě je dvanáct vojáků. Kolik různých dvojčlenných hlídek z nich lze sestavit , jestliže první z dvojice má být velitelem?

   (132)

2. Je dán čtverec ABCD a na každé jeho straně **n** vnitřních bodů. Určete počet všech trojúhelníků XYZ ,jejichž vrcholy leží v daných bodech a na různých stranách čtverce ABCD.

   (1/6(4n.3n.2n)=4n³)

3. Upravte

$a)\ (\mathrm{n}+1)! - n\, n!$ (n!)

b) $\dfrac{(\mathrm{n}+1)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$ (1)

c) $\dfrac{(\mathrm{n}+2)!}{n!} - \dfrac{2(n+1)!}{(n-1)!} + \dfrac{n!}{(n-2)!}$ (2)

Obecné metody řešení - základní typy kombinatorických úloh

Skupiny

1. Bez opakování
a/ záleží na pořadí:
-variace
-permutace
b/nezáleží na pořadí:
-kombinace

2.S opakováním
a/záleží na pořadí
-variace
-permutace
b/nezáleží na pořadí
-kombinace

Skupiny bez opakování

VARIACE bez opakování

základní formulace úlohy: „Kolik uspořádaných k-tic lze vytvořit z n prvků?
„Kolika způsoby lze z n objektů vybrat k≤n objektů,jestliže záleží na pořadí výběru?“

Variace je počet možností sestavení k skupin z n různých prvků, kde záleží na pořadí prvků v každé skupině, avšak prvky se vyskytují nejvýše jednou.

Počet variací označujeme V(k,n) = $\frac{n!}{(n-k)!}$ kϵN , nϵN , 1≤ k ≤ n

Vzorové úlohy:

1.Najděte všechna trojmístná čísla vytvořená z číslic 1 až 6, aniž by se číslice opakovaly.

Řešení: sestavujeme skupiny 3 čísel, v nichž je jasné, že záleží na pořadí, protože např. číslo 246 není totéž jako 642

V(3,6) = 120

2. Kolik jedno až trojciferných čísel lze vytvořit z číslic 0 , 1 , 2 ,...,9,jestliže se cifry vyskytují nejvýše jednou.

Řešení:
n = { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 } n = 10
k: 1,2,3
jednociferná V(1,10) = 10
dvojciferná 1 . 9 zbývajících /kromě 1/
2 . 9 zbývajících /kromě 2/
…….
0 . 9 – nelze ,tím bychom vytvořili jednociferná čísla

celkem dvojciferných V(2,10) - V(1,9) /odečteme ta čísla, která začínají nulou/
V(2,10) - V(1,9) = 81
trojciferná /postup se opakuje, od celkového počtu musíme odečíst čísla začínající nulou, ta by byla dvojciferná/
V(3,10) - V(2,9) = 648

celkem všech : V(1,10) + V(2,10) – V(1,9) + V(3,10) – V(2,9) = 739

3. Kolik různých umístění může být na prvních třech místech při hokejovém mistrovství, jestliže se ho účastní 8 družstev?

Řešení: - při umístění záleží na pořadí, nelze aby družstvo bylo první a zároveň třetí
- jedná se tedy o variace bez opakování třetí třídy z osmi

$$V(3,8) = 336$$

Procvičte si:

1. Kolik trojciferných přirozených čísel dělitelných pěti lze sestavit z číslic 1,2,3,4,5 jestliže se číslice neopakují?

(12)

2. Kolika způsoby zvolíte třídní výbor, který se skládá z předsedy, pokladníka a referenta, je-li ve třídě 20 žáků?

$V(3,20)$

PERMUTACE bez opakování

základní formulace úlohy : „Kolika způsoby lze seřadit do řady prvky konečné neprázdné n – prvkové množiny?“

Permutací n prvků, rozumíme skupiny všech n prvků, uspořádaných v každém možném pořadí.

Počet permutací označujeme $P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = ; 0! = 1$

$P(n,n) = n!$

Permutace je zvláštní případ variace kde n=k.

Vzorové úlohy:

1. Kolika způsoby lze rozsadit pět hostů do pěti křesel?

Řešení:
- hledáme 5-ti prvkové množiny z 5-ti prvků

$P(5) = 5! = 120$

2. Kolika způsoby lze vedle sebe uložit šest různých knih?

Řešení:
- máme najít šestiprvkové množiny

$P(6) = 6! = 720$

3. Vozy tvoří kolonu takto – 2 vozy škoda, 3 vozy opel, 4 vozy fiat. Kolika způsoby lze seřadit kolonu jestliže jsou stejná vozidla za sebou?

- jedná se o uspořádané trojice ! $P(3) = 3! = 6$

Procvičte si:

1. Kolik různých šesticiferných přirozených čísel lze napsat pomocí číslic 1,2,3,4,5,6.jestliže se číslice neopakují?
(P(6) = 720)

2. Kolika způsoby může stát za sebou pět vojáků ABCDE tak, aby
   a/ voják A byl první a voják E poslední (P(3)=6)
   b/ vojáci CDE stáli za sebou v libovolném pořadí (P(3).P(3)=36)

3. S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentě vystoupit šest poslanců, určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení.
(P(6)= 720)

KOMBINACE bez opakování

základní formulace úlohy**:** “Kolika způsoby lze z n různých objektů vybrat k ($k \leq n$) objektů, nezáleží-li na pořadí výběru?“
„ Kolik k-prvkových podmnožin má n-prvková množina?“

Kombinace je počet všech sestavených k skupin z n prvků,kde nezáleží na pořadí.

Platí:

V(k,n) = k! K(k,n)

Celý postup ilustruje schéma pro 2členné variace ze tří prvků a , b , c.

2členné variace z prvků a , b , c			
(a,b) (b,a)	(c,b) (b,c)	(a,c) (c,a)	=> V(2,3) = 6
↓ (a,b)	↓ (b,c)	↓ (a,c)	=> K(2,3) = 3

závěr**: V(2,3) = 2! K(2,3)**

Počet kombinací označujeme **K(k,n) =** $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Tento výraz se v kombinatorice vyskytuje velmi často, proto je pro něj zaveden zvláštní symbol (čte se „ n nad k „) a nazývá se kombinační číslo. Vzhledem k významu je mu věnována zvláštní kapitola, kde se dozvíte jaké vlastnosti toto číslo má.

Příkladem kombinací bez opakování je třeba počet možností telefonního spojení mezi dvěma skupinami deseti účastníků tak , aby každý vždy hovořil pouze s jedním ze skupiny, a přitom jsou k dispozici jen 3 telefonní linky. Počet prvků je zde počet účastníků ve skupině / každou linkou jsou spojeni dva účastníci současně/ , třídu tvoří počet linek – tedy
Řešení:

n = 10 , k = 3 K(3,10) = 120

Vzorové úlohy:

1. Na polici je 40 knih. Kolika způsoby lze vybrat dvě?

Řešení:
n = 40
k = 2 - nezáleží na pořadí výběru K(2,40) = 780

2. V rovině je dáno 24 různých bodů, z nichž žádné tři body neleží na téže přímce. Vypočtěte, kolik je těmito body určeno : a/ přímek
b/ trojúhelníků

Řešení:

ad a/ přímka je jednoznačně určena dvěma body nebo-li hledáme dvojice z 24 prvků
k = 2 , n = 24 , nezáleží na pořadí K(2,24) = 12.23 = 276

Představme si, že ze 24 bodů právě 6 umístíme na jednu přímku.
- musíme pak vyjít z celkového počtu přímek a od něj odečíst ty, které by mohlo tvořit těchto 6 bodů
- nezapomínáme na tu jedinou přímku na níž leží těchto šest bodů

pro výpočet pak platí : K(2,24) - K(2,6) + 1

ad b/ trojúhelník tvoří rovinu a ta je dána 3 body, nebo-li hledáme trojice z 24 prvků k = 3 , n = 24 , nezáleží na pořadí K(3,24) = 23.22.4 =

3. Určete kolika způsoby je možno ze sedmi mužů a čtyř žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou: a/ právě dvě ženy
b/ aspoň dvě ženy

ad a/ - pro šestičlennou skupinu lze dvě ženy ze čtyř vybrat K(2,4) způsoby, zbývající čtyři muže ze sedmi K(4,7) způsoby
- podle kombinatorického pravidla součinu je možno skupinu utvořit K(2,4) . K(4,7) = 210 způsoby

ad b/ - má-li šestičlenná skupina obsahovat aspoň dvě ženy, obsahuje právě dvě, anebo právě tři, anebo právě čtyři ženy
- počet způsobů jak lze skupinu utvořit je
K(2,4).K(4,7) + K(3,4).K(3,7) + K(4,4).K(2,7) = 371 způsobů

4. Je dáno n bodů , z nichž žádné ze čtyř neleží v jedné rovině, určete počet rovin.
- rovina je dána 3 body , tzn. že k = 3
- vybíráme trojice z n bodů, u nichž nezáleží na pořadí

$$K(3,n) = \binom{n}{3}$$

Procvičte si:

1. Petr má sedm knih, o které se zajímá Ivana, Ivana má deset knih, o které se zajímá Petr. Určete , kolika způsoby si Petr může vyměnit své dvě knihy za dvě Ivaniny.
(K(2,7).K(2,10)=945)
2. Určete, kolika způsoby může m chlapců a n dívek utvořit taneční pár.
(K(1,m).K(1,n)= m.n)

3. Určete kolika způsoby je možno ze dvaceti osob vybrat deset, požadujeme-li aby mezi vybranými a/ nebyl pan A (K(10,19))
b/ nebyli zároveň pánové A, (K(10,20)-K(8,18))
c/ byl aspoň jeden z pánů A,B (2K(9,18)+K(8,18))

Skupiny s opakováním

Variace s opakováním

základní formulace úlohy:“ Kolika způsoby lze z daných n objektů vybrat k objektů, jestliže záleží na pořadí vybírání a připustíme-li,že objekty mohou být vybírány vícekrát?“

Každý takový výběr nazýváme k-prvkovou variací s opakováním z n prvků.
- uvědomíme si pojem „variace“ a dodejme, že prvky se mohou opakovat
- toto opakování je potřebné k sestavování číselných skupin

motivační úloha: Najděte počet variací skupin trojmístných čísel z číslic 1 až 6 jestliže.

a/ číslice se neopakují
Řešení:
- zde se jedná o čistou variaci bez opakování $V(3,6) = 120$

b/ číslice se opakují
Řešení:
- lze vytvořit čísla 1 1-6 1-6 (přiřadí)
2
3
.
.
6 1-6 1-6
----
6 . 6 . 6 pro výpočet platí $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$
šest možností na místě stovek, desítek, jednotek

Pro variaci s opakováním platí $V'(k,n) = n^k$

Vzorové úlohy:

1. Určete,kolik značek Morseovy abecedy lze utvořit sestavením teček a čárek do skupin o jednom až třech prvcích.

   Řešení:
   - Morseova abeceda obsahuje jako prvky tečku a čárku, n=2
   - v sestavování se tedy prvky opakují, ale stále záleží na pořadí/ význam abecedy/
   - skupiny tedy mohou obsahovat stejné prvky, k = 1 , 2 , 3

   Pro výpočet platí: $V'(1,2) + V'(2,2)+V'(3,2) = 2 + 2^2 + 2^3 = 14$

2. V jisté zemi je státní poznávací značka tvořena uspořádanou sedmicí , jejíž první tři členy jsou písmena a další čtyři číslice.Určete, kolik poznávacích značek mají k dispozici, mohou-li pro první část značky použít každé z 28 písmen.

Řešení
- první část značky je uspořádaná trojice vybraná z 28 písmen, která se mohou opakovat
- jejich počet je $V'(3,28) = 28^3$
- druhá část značky je uspořádaná čtveřice vybraná z deseti číslic, které se také mohou opakovat
- jejich počet je $V'(4,10) = 10000$
- podle kombinatorického pravidla součinu pak platí

$$V'(3,28) \cdot V'(4,10) = 28^3 \cdot 10000 = 219\,520\,000 \quad \text{poznávacích značek}$$

3. Kolik různých telefonních stanic lze zapojit na telefonní centrálu, jestliže jsou všechna čísla stanic pěticiferná?Kolik může být těchto stanic, předpokládáme-li, že číslo nemůže začínat číslicí 0?

Řešení:
- čísla telefonních stanic jsou uspořádané pětice tvořené z deseti číslic
- jejich počet je proto počet variací s opakováním páté třídy z deseti prvků

$$V'(5,10) = 100\,000$$

- pěticiferných čísel, která začínají číslicí 0, je tolik, kolik je variací s opakováním čtvrté třídy z deseti prvků
- jejich počet je $V'(4,10) = 10\,000$

- počet stanic , jejichž číslo nezačíná číslicí 0, je

$$V'(5,10) - V'(4,10) = 100\,000 - 10\,000 = 90\,000$$

Procvičte si:

1. Kolik různých čtyřciferných čísel lze sestavit z číslic 5 , 6 , 8?

($V'(4,3)$)

2. Hodíme třemi hracími kostkami – bílou,modrou a žlutou. Kolik různých výsledků dostaneme?

($V'(3,6)$)

3.Kufřík má heslový zámek, který se otevře , když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici.Těchto číslic je na každém kotouči devět.Určete počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít jestliže jsme zapomněli heslo.

($V'(5,9)$)

Permutace s opakováním

základní formulace úlohy: „Mějme k_1 objektů prvního druhu,k_2 objektů druhého druhu……atd. až k_k objektů k-tého druhu.Kolika způsoby lze těchto $k_1+k_2+\ldots+k_k$ objektů uspořádat do řady?“

Každé takové uspořádání nazýváme permutace s opakováním a jejich celkový počet označujeme P‘($k_1,k_2,k_3,\ldots\ldots k_k$) a vypočteme

$$P'(k_1, k_2, \ldots, k_k) = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots k_k)}{k_1! + k_2! + \ldots k_k!}$$

Vzorové úlohy:

1. Určete počet všech anagramů, jež lze vytvořit ze slova KOMBINATORIKA.

Řešení:
- vytvoříme skupiny stejných písmen, ty budou postupně tvořit $k_1\ldots.k_k$
A – 2 ,B – 1 , I – 2 , K - 2 , M – 1 , A – 1 , O – 2 , R – 1 , T – 1
celkem 13 písmen, která se mohou jakkoli zaměňovat

počet takto vytvořených anagramů je P‘(2,2,2,2,1,1,1,1,1) $= \frac{13!}{16}$

2. Kolika způsoby může aranžér umístit do výkladní skříně 3 stejné červené svetry, 2 stejné modré sukně a 3 stejné zelené kabáty?
Řešení:
- vytvoříme postupně skupiny $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3$
- množina ze které vybíráme je dána součtem skupin tzn. $k_1+k_2+k_3=8$

počet možností umístění je P‘(3,3,2) =560

3. Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných devíti,v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují pouze číslice 0 , 1 ,2 ,5 , 7.
Řešení:
- ciferný součet daných čísel musí být dělitelný devíti, tzn. přicházejí v úvahu součty 27 , 18 , 9 ,vzhledem k zadaným číslicím nelze získat součet 27
- součet 18 lze dostat použitím číslic 7,7,2,2 anebo 7,5,5,1
- součet 9 utvoří pouze číslice 7,2,0,0 nebo 7,1,1,0 nebo 5,2,2,0 nebo 5,2,1,1
- počet takových čísel je patrný z následujícího zápisu

7,7,2,2……….P‘(2,2) = 6
7,5,5,1……….P‘(1,2,1) = 12
7,2,0,0……….P‘(1,1,2) – P(3) = 6 čísla nesmí začínat nulou,jinak trojciferná
7,1,1,0……….P‘(1,2,1) – P‘(1,2) = 9
5,2,2,0 ………P‘(1,2,1) – P‘(1,2) = 9
5,2,1,1……….P‘(1,1,2) = 12

- počet všech takto tvořených čtyřciferných přirozených čísel je dán součtem jednotlivých výpočtů 6 + 12 + 6 + 9 + 9 + 12 =54

Procvičte si:

1. Určete počet všech anagramů ze slova ABRAKADABRA.

(P‘(5,2,2,1,1))

2. Určete počet všech uspořádaných šestic sestavených ze čtyř nul a dvou jedniček. (P‘(2,4))

3. Vozy tvoří kolonu takto – 2 vozy Škoda, 3 vozy Opel, 4 vozy Fiat. Kolika způsoby lze seřadit kolonu jestliže pořadí vozů není podmínkou?
(P‘(2,3,4))

Kombinace s opakováním

základní formulace úlohy: „ Kolika způsoby můžeme z daných n objektů vybrat k objektů , nezáleží-li na pořadí a připustíme-li , že objekty mohou být vybrány vícekrát?“

Každý z možných výběrů nazýváme k-prvkovou kombinací s opakováním z n prvků.

K-členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k.krát.
Jejich celkový počet označujeme K‘(k,n) a počítáme ho podle vzorce

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$$

Na rozdíl od kombinací bez opakování zde není třeba předpokládat $k \leq n$.

Vzorové úlohy:

1. Máme tři stejné předměty a tři přihrádky. Kolika různými způsoby můžeme tyto předměty rozdělit do přihrádek?

Řešení:
- tři stejné předměty lze umístit postupně takto

1 přihrádka	3	0	0	0	0	2	2	1	1	1
2 přihrádka	0	3	0	1	2	1	0	0	2	1
3 přihrádka	0	0	3	2	1	0	1	2	0	1

- z toho je vidět, že požadavkům úlohy vyhovuje 10 způsobů

- pro výpočet n = 3 /počet přihrádek/
k = 3 /počet předmětů/

pak platí $K'(3,3) = \binom{5}{3} = 10$

Vzorové úlohy:

1. V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky; kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné . Určete, kolika způsoby lze vybrat pět kuliček, jestliže v sáčku je
a/ aspoň pět kuliček od každé barvy
b/ pět červených, čtyři modré a čtyři zelené.

Řešení:
V pětici kuliček, které vybíráme, nezáleží na pořadí a barvy kuliček se v ní mohou opakovat. Jde tedy o 5členné kombinace kombinace s opakováním ze tří prvků.
a/ V tomto případě je možno utvořit všechny možné pětice ze tří barev, neboť kuliček dané barvy je dostatek tj. pět. Počet způsobů výběru je K‘(5,3)= 21
b/ Nyní nelze vybrat pět modrých ani pět zelených kuliček. Ostatní výběry lze uskutečnit. Počet způsobů výběru je K‘(5,3) – 2 = 19

2. Ze skladu je třeba rozvést šest stejných beden do čtyř různých prodejen.
Určete počet způsobů rozvozu.

Řešení:

- uvědomíme si, že nezáleží na pořadí a ne všechny prodejny musí mít zboží
- může existovat prodejna, která bude mít všech šest beden
- jedná se tedy o kombinaci šesté třídy s opakováním ze čtyř prvků

počet způsobů rozvozu je $K'(6,4) = 84$

3. Určete počet způsobů jak lze dostat čtyři stejné koule do tří různých krabic.

Řešení:

- uvědomíme si, že je možné umístit všechny čtyři koule do jedné z krabic
- jedná se tedy znovu o kombinaci a to čtvrté třídy ze tří prvků s opakováním

počet způsobů umístění koulí je $K'(4,3) = 15$

Procvičte si:

1. Podle vlastností dělíme látky na feromagnetické,paramagnetické a diamagnetické.
Určete počet rozdělení osmi látek do těchto skupin.
($K'(8,3)$)

2. V akvaristice mají čtyři druhy rybek v ceně 10 Kč za rybku. Kolika způsoby lze nakoupit, zaplatíme-li 60 Kč?
($K'(6,4)$)

3. Určete počet všech trojúhelníků, z nichž žádné dva nejsou shodné a jejichž každá strana má velikost vyjádřenou jedním z čísel 4,5,6,7.
($K'(3,4)$)

Závěr první části kombinatoriky

Získané dovednosti:

- chápat pojem faktoriál a operace s faktoriály
- chápat pojem variace, permutace, kombinace bez opakování i s opakováním, umět tyto pojmy použít při řešení jednoduchých úloh
- na základě rozboru textu dané úlohy umět aplikovat správný kombinatorický pojem

Úlohy z kombinatoriky nebývají složité, většinou se jedná o dosazení dvou čísel/třída, prvky/ do jednoho vzorce. Důležité je rozpoznat, která operace danou úlohu řeší.
To znamená, jde-li o variaci, permutaci nebo kombinaci.
Určitou pomůckou zde je způsob vyjádření počtu prvků. Je-li zřejmé, že jsou všechny prvky stejné /body roviny/ nebo není známo jejich rozlišení /pět číslic a neví se které/ jde zpravidla o kombinace – k určení nás zajímá jen jejich kvantita.
U variací /tedy i u permutací/ nás zajímá obojí.

Nelze opomenout úlohy, které mívají určenu stránku kvalitativní i kvantitativní a přesto nejde o variace. Uvedeme následující úlohu:

Lístek v loterii obsahuje čísla 1 až 9, kolik lístků bychom potřebovali, abychom vyhráli.

Řešení:
- položme si otázku, zda v dané skupině existuje pořadí čísel a zjistíme, že ne, protože označení je stejné
- lístek dále obsahuje 9 číslic, ale ty jsou rozlišeny 1 až 9
- možnosti označení čísel na lístku nelze kvalitativně rozlišit a jde tedy o kombinace

Řada příkladů není postavena jen na určení druhu operace.Obsahují zápletku, kterou je nutno řešit výhradně logicky. Uvedeme následující úlohu:

Máme určit počet úhlopříček v n-úhelníku.

Řešení:
- zde je jasné, že všechny úhlopříčky jsou stejné, nelze je tedy řadit
- jde o kombinace, kde počet prvků je vlastně počet úhlů, ze kterých úhlopříčky vycházejí
- jednu skupinu vždy tvoří jedna úhlopříčka, která je zadána dvěma body
- jde o kombinaci 2. třídy příklad bychom řešili $K(2,n)$

Je zde ale zápletka, že všechny přímky mezi úhly nejsou úhlopříčky /některé jsou strany n-úhelníku, kterých je n/, takže je musíme od získaného vztahu odečíst.

Počet úhlopříček tedy je : $K(2,n) - n$

A konečně jsou zde i úlohy školní, kde jen těžko aplikujeme i výše uvedenou logiku z praxe. Můžeme uvést jeden příklad za všechny:

Kolik pěticiferných čísel je možno sestavit z číslic 0,1,3,4,7?

- jelikož u každého čísla záleží na pořadí číslic, jedná se o variace /v tomto případě o permutace n=k/
- pozor však na čísla začínající nulou, nyní ještě nevíme kolik jich bude
- musíme si představit, že to budou čísla, mající na začátku stále nulu, takže se kombinování neúčastní/ zbytek se tedy kombinování účastní tj. čtyři/
- odečteme od celkového počtu permutací z pěti prvků počet permutací ze čtyř prvků

$$P(5) – P(4) = 5! – 4! = 96$$

Na závěr si vytvoříme jednoduchý příklad:

Mějme množinu 6 prvků, které tvoří číslice 1,2,3,4,5,6. Vytvořme všechny kombinační funkce druhé třídy, tedy n = 6, k = 2.

1. Vytvoříme variace bez opakování $V(2,6) = 30$
2. Permutace nelze vytvořit ani bez opakování ani s opakováním.
3. Kombinace bez opakování $K(2,6) = 15$ - povšimneme si vztahu kombinace a variace $K < V$
4. Variace s opakováním, / obecně tedy v n-tici / vytvoříme tak, že si představíme, že v každé dvojici k sobě mohou být přiřazeny i stejné prvky $V'(2,6)=36$
5. Kombinace s opakováním $K'(2,6) = 21$

V následujících úlohách zdůvodněte typ a řešte /konzultujte s vyučujícím/.

1. Kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit z číslic 2 a 5? (32)
2. Kolik trojciferných čísel lze sestavit z číslic 1,2,3,4,5, jestliže se žádná číslice neopakuje? (60)
3. Kolik přímek je určeno šesti body, jestliže
   - žádné tři neleží na téže přímce (15)
   - tři body leží na jedné přímce (13)
4. Obchod nabízí 12 různých pohledů. Kolika způsoby lze koupit
   - 15 pohledů (7 726 160)
   - 7 pohledů (31 824)
   - 7 různých pohledů (792)
5. Kolika způsoby lze ubytovat 10 hostů do dvou třílůžkových pokojů a do dvou dvoulůžkových pokojů? (25 200)

6. Kolik různých součinů o dvou činitelích lze utvořit z čísel 2,3,5,7, jestliže se libovolněkrát opakují?

(10)

7. Kolik anagramů vytvoříte ze slova PRAMA?

(60)

8. Určete počet výsledků při jednom hodu 2 kostkami.

(36)

9. Kolik přirozených čísel menších než 5 000 lze vytvořit z číslic 0,3,4,5, jestliže se žádná neopakuje?

(42)

10. Kolika způsoby lze ze sady 12 různobarevných pastelek, mezi nimiž je jedna černá, vybrat 3 tak, aby

- jedna z nich byla černá (55)
- ani jedna nebyla černá (165)