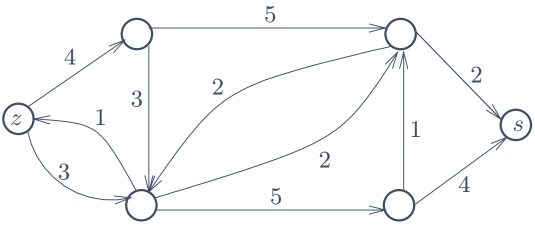
2 Toky v sítích

Nyní se podíváme na jinou oblast tzv. "síťových" úloh:
Jedná se třeba o potrubní sítě přepravující vodu nebo plyn, o dopravní síť silnic s přepravou zboží, nebo třeba o internet přenášející data. Obvykle nás zajímá problém přenést z daného *zdroje* do daného cíle čili *stoku* co nejvíce této substance, za omezujících podmínek kapacit jednotlivých přepravních cest.



Stručný přehled lekce

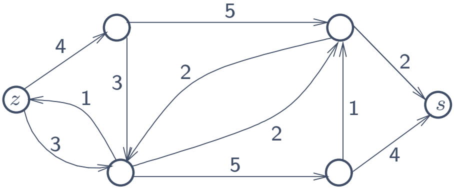
- Definice sítě (ohodnoceného orientovaného grafu) a toku v ní.
- Algoritmus nenasycených cest (Ford-Fulkersonův).
- Důsledky pro souvislost, párování a výběr reprezentantů.
- Princip dobré charakterizace úloh.

2.1 Definice sítě

Základní strukturou pro reprezentaci sítí je orientovaný graf. Vrcholy grafu modelují jednotlivé uzly sítě a hrany jejich spojnice.

Definice 2.1. **Síť** je čtveřice $S = (G, z, s, w)$, kde

- G je orientovaný graf,
- vrcholy $z \in V(G)$, $s \in V(G)$ jsou *zdroj* a *stok*,
- $w : E(G) \rightarrow \boldsymbol{R}^{+}$ je kladné ohodnocení hran, zvané *kapacita hran*.



Poznámka: V praxi může být zdrojů a stoků více, ale v definici stačí pouze jeden zdroj a stok, z něhož / do nějž vedou hrany do ostatních zdrojů / stoků. (Dokonce pak různé zdroje a stoky mohou mít své kapacity.)

Značení: Pro jednoduchost píšeme ve výrazech znak $e \to v$ pro hranu e přicházející do vrcholu v a $e \leftarrow v$ pro hranu e vycházející z v.

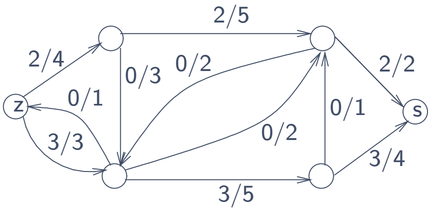
Definice 2.2. Tok v síti $S = (G, z, s, w)$
je funkce $f : E(G) \to \boldsymbol{R}_0^+$ splňující

- $\forall e \in E(G):\ 0 \le f(e) \le w(e)$,
- $\forall v \in V(G), v \neq z, s:\ \sum_{e \to v} f(e) = \sum_{e \leftarrow v} f(e)$.

Velikost toku f je dána výrazem $\|f\| = \sum_{e \leftarrow z} f(e) - \sum_{e \to z} f(e)$.

Značení: Tok a kapacitu hran v obrázku sítě budeme zjednodušeně zapisovat ve formátu F/C, kde F je hodnota toku na hraně a C je její kapacita.

Neformálně tok znamená, kolik substance je každou hranou zrovna přenášeno (ve směru této hrany, proto hrany musí být orientované). Tok je pochopitelně nezáporný a dosahuje nejvýše dané kapacity hrany.



Ve vyobrazeném příkladě vede ze zdroje vlevo do stoku vpravo tok o celkové velikosti 5.

Poznámka: Obdobně se dá velikost toku definovat u stoku, neboť

$$0=\sum_{e}(f(e)-f(e))=\sum_{v}\sum_{e\leftarrow v}f(e)-\sum_{v}\sum_{e\rightarrow v}f(e)=\sum_{v=z,s}\left(\sum_{e\leftarrow v}f(e)-\sum_{e\rightarrow v}f(e)\right).$$

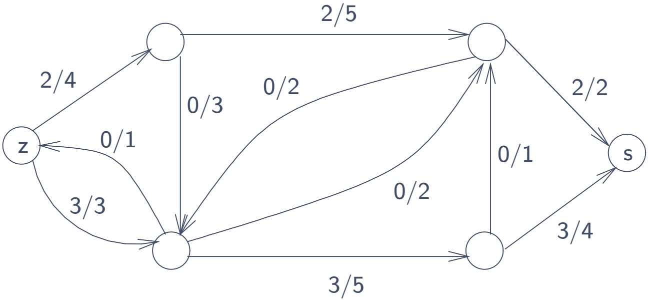
(Dvojité sumy uprostřed předchozího vztahu nabývají stejných hodnot pro všechny vrcholy kromě z a s dle definice toku.) Proto velikost toku počítaná u zdroje je rovna opačné velikosti toku počítaného u stoku.

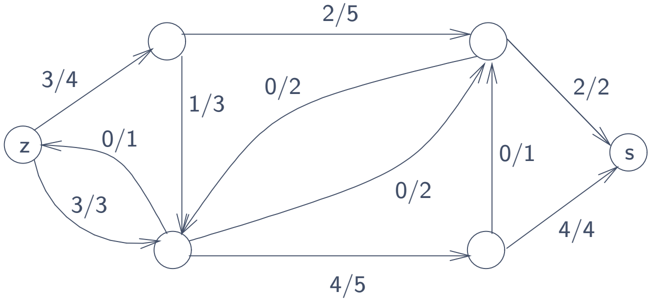
2.2 Hledání maximálního toku

Naším úkolem je najít co největší tok v dané síti. Pro jeho nalezení existují jednoduché a velmi rychlé algoritmy.

Úloha 2.3. O maximálním toku v síti
Je dána síť $S = (G, z, s, w)$ a naším úkolem je pro ni najít co největší tok ze zdroje z do stoku s vzhledem k ohodnocení w.

Tok velikosti 5 uvedený v ukázce v předchozí části nebyl optimální, neboť v té síti najdeme i tok velikosti 6:





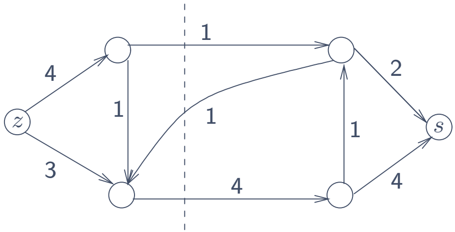
Jak však poznáme, že větší tok již v dané síti neexistuje? V této konkrétní ukázce to není obtížné, vidíme totiž, že obě dvě hrany přicházející do stoku mají součet kapacit $2 + 4 + 6$, takže více než 6 do stoku ani přitéct nemůže.

V obecnosti lze použít obdobnou úvahu, kdy najdeme podmnožinu hran, které nelze tokem "obejít" a které v součtu kapacit dají velikost našeho toku. Existuje však taková množina hran vždy? Odpověď nám dá následující definice a věta.

Definice 2.4. **Řez** v síti $S = (G, z, s, w)$
je podmnožina hran $C \subseteq E(G)$ taková, že v podgrafu $G - C$ (tj. po odebrání hran C z G) nezbude žádná orientovaná cesta ze z do s.
Velikostí řezu C rozumíme součet kapacit hran z C, tj. $\|C\| = \sum_{e \in C} w(e)$.

Věta 2.5. *Maximální velikost toku v síti je rovna minimální velikosti řezu.*

Na následujícím obrázku vidíme trochu jinou síť s ukázkou netriviálního minimálního řezu velikosti 5, naznačeného svislou čárkovanou čarou. Všimněte si dobře, že definice řezu mluví o přerušení *všech orientovaných cest ze z do s*, takže do řezu stačí započítat hrany jdoucí přes svislou čáru od z do s, ale ne hranu jdoucí zpět. Proto je velikost vyznačeného řezu $1 + 4 = 5$.

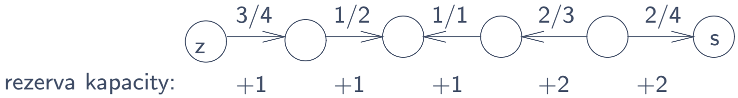


Poznámka: Tato věta poskytuje tzv. *dobrou charakterizaci* problému maximálního toku: Když už nalezneme maximální tok, tak je pro nás vždy snadné dokázat, že lepší tok není, nalezením příslušného řezu o stejné velikosti. Přitom toto zdůvodnění řezem můžeme směle ukázat i někomu, kdo se vůbec nevyzná v matematice.

Definice: Mějme síť S a v ní tok f. *Nenasycená cesta* (v S vzhledem k f) je neorientovaná cesta v G z vrcholu u do vrcholu v (obvykle ze z do s), tj. posloupnost navazujících hran $e_1, e_2, \dots, e_m$, kde $f(e_i) < w(e_i)$ pro e_i ve směru z u do v a $f(e_i) > 0$ pro e_i v opačném směru.

Hodnotě $w(e_i) - f(e_i)$ pro hrany e_i ve směru z u do v a hodnotě $f(e_i)$ pro hrany e_i v opačném směru říkáme *rezerva kapacity* hran e_i. Nenasycená cesta je tudíž cesta s kladnými rezervami kapacit všech hran.

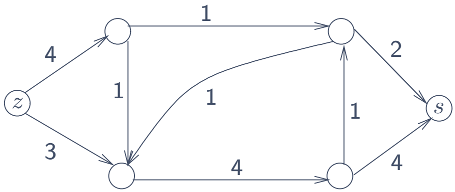
Zde vidíme příklad nenasycené cesty ze zdroje do stoku s minimální rezervou kapacity $+1$.



Všimněte si dobře, že cesta není orientovaná, takže hrany na ní jsou v obou směrech.

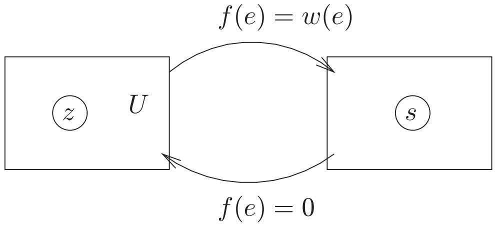
Algoritmus 2.6. Ford–Fulkersonův pro tok v síti

`vstup` *síť* $S = (G, z, s, w)$;
tok $f \equiv 0$;
`do` $\{$
    prohledáváním grafu najdeme množinu U *vrcholů* G*,*
    do kterých se dostaneme ze z *po nenasycených cestách*;
    `if` ($s \in U$) $\{$
        `P =` *(výše nalezená) nenasycená cesta v* S *ze* z *do* s;
        zvětšíme tok f *o minimální rezervu kapacity hran v* P;
    $\}$
`while` ($s \in U$);
`výstup` *vypíšeme maximální tok* f;
`výstup` *vypíšeme min. řez jako množinu hran vedoucích z* U *do* $V(G) - U$.



Důkaz správnosti Algoritmu 2.6:
Pro každý tok f a každý řez C v síti S platí $\|f\| \leq \|C\|$. Jestliže po zastavení algoritmu s tokem f nalezneme v síti S řez o stejné velikosti $\|C\| = \|f\|$, je jasné, že jsme našli maximální možný tok v síti S. Zároveň tím dokážeme i platnost Věty 2.5.

Takže stačí dokázat, že po zastavení algoritmu nastane rovnost $\|f\| = \|C\|$, kde C je vypsaný řez mezi U a zbytkem grafu G. Vezměme tok f v S bez nenasycené cesty ze z do s. Pak množina U z algoritmu neobsahuje s. Schematicky vypadá situace takto:



Jelikož z U žádné nenasycené cesty dále nevedou, má každá hrana $e \leftarrow U$ (odcházející z U) plný tok $f(e) = w(e)$ a každá hrana $e \rightarrow U$ (přicházející do U) tok $f(e) = 0$. Velikost toku f ze z do s se také dá psát jako

$$\|f\| = \sum_{e \leftarrow U} f(e) - \sum_{e \rightarrow U} f(e) = \sum_{e \leftarrow U} f(e) = \sum_{e \in C} w(e) = \|C\| \ .$$

To je přesně, co jsme chtěli dokázat o výsledném toku. □

Důsledek 2.7. *Pokud jsou kapacity hran sítě S celočíselné, optimální tok také vyjde celočíselně.*

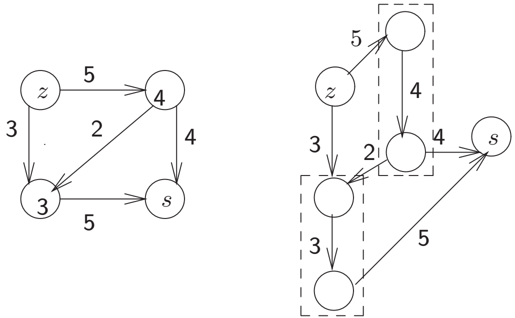
Poznámka: Algoritmus pro celá čísla kapacit vždy skončí. Pro reálná čísla se ale dají najít extrémní případy, které nepovedou k řešení ani v limitě.

Pro rychlý běh algoritmu je vhodné hledat nejkratší nenasycenou cestu, tj. prohledáváním sítě do šířky. V takové implementaci algoritmus dobře a rychle funguje i s reálnými kapacitami hran.

2.3 Zobecnění sítí a další aplikace

Pojmy sítě a toků v ní lze zobecnit v několika směrech. My si zde stručně uvedeme tři možnosti:

1. U sítě můžeme zadat i *kapacity vrcholů*.
   To znamená, že žádným vrcholem nemůže celkem protéct více než povolené množství substance. Takovou síť "zdvojením" vrcholů snadno převedeme na běžnou síť, ve které kapacity původních vrcholů budou uvedeny u nových hran spojujících zdvojené vrcholy. Viz neformální schéma:



2. Pro hrany sítě lze zadat také *minimální kapacity*, tedy dolní meze toku. (Například u potrubní sítě mohou minimální vyžadované průtoky vody garantovat, že nedojde k zanesení potrubí.) V této modifikaci úlohy již přípustný tok nemusí vůbec existovat. Takto zobecněná úloha je také snadno řešitelná, ale my se jí nebudeme zabývat.

3. V síti lze najednou přepravovat více substancí. To vede na problém tzv. *vícekomoditních toků* v síti. Tento problém je složitější a už není v obecnosti snadno řešitelný, a proto se jím nebudeme zabývat.

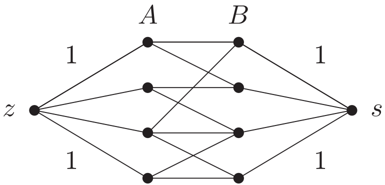
Kromě uvedených (a podobných) zobecnění toků v sítích jsou velmi zajímavé i některé speciální formulace problému toků, které se vyskytují v možná i nečekaných oblastech. Více o tom napíšeme v dalších částech tohoto oddílu.

Bipartitní párování

Definice: *Párování* v (biparitním) grafu G je podmnožina hran $M \subseteq E(G)$ taková, že žádné dvě hrany z M nesdílejí koncový vrchol.

Pojem (bipartitního) párování má přirozenou motivaci v mezilidských vztazích.

Algoritmus 2.8. Nalezení bipartitního párování
Pro daný bipartitní graf G s vrcholy rozdělenými do množin A, B sestrojíme síť S následovně:



Všechny hrany sítě S orientujeme od zdroje do stoku a přiřadíme jim kapacity 1. Nyní najdeme (celočíselný) maximální tok v S Algoritmem 2.6. Do párování vložíme ty hrany grafu G, které mají nenulový tok.

Důkaz správnosti Algoritmu 2.8: Podle Důsledku 2.7 bude maximální tok celočíselný, a proto každou hranou poteče buď 0 nebo 1. Tím budou vybrány hrany párování a podle zadaných kapacit nebudou sdílet koncové vrcholy. □

Vyšší grafová souvislost

Představme si, že na libovolném grafu G definujeme zobecněnou síť tak, že kapacity všech hran a všech vrcholů položíme rovny 1 v obou směrech. Pak máme:

Lema 2.9. *Nechť u, v jsou dva vrcholy grafu G a $k > 0$ je přirozené číslo. Pak mezi vrcholy u a v existuje v G aspoň k disjunktních cest, právě když po odebrání libovolných $k-1$ vrcholů různých od u, v z G zůstanou u a v ve stejné komponentě souvislosti zbylého grafu.*

To přímo ukazuje cestu k důkazu Mengerovy věty o násobné souvislosti grafu.

Různí reprezentanti

Definice: Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. *Systémem různých reprezentantů* množin $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nazýváme takovou posloupnost různých prvků $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, že $x_i \in M_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Věta 2.10. (Hall) *Nechť $M_1, M_2, \ldots, M_k$ jsou neprázdné množiny. Pro tyto množiny existuje systém různých reprezentantů, právě když platí*

$$\forall J \subseteq \{1, 2, \ldots, k\} : \left| \bigcup_{j \in J} M_j \right| \geq |J| \,,$$

neboli pokud sjednocení libovolné skupiny z těchto množin má alespoň tolik prvků, kolik množin je sjednoceno.

2.4 Dobrá charakterizace

V návaznosti na Definici 1.13, bod 5, se podíváme na tuto situaci: Dokazujeme optimalitu nalezeného řešení, tj. že lepší řešení našeho problému neexistuje, tím, že (názorně) ukážeme nějakou vhodnou “vylučovací” vlastnost. Tzn. něco, co jasně vylučuje existenci lepšího řešení způsobem pochopitelným i pro laika neobeznámeného hlouběji s problémem a naším řešením. (Poznamenáváme, že ne vždy je něco takového možné.)

Přesněji řečeno, v Úloze 1.1 o přidělování pracovních úkolů platí, že existence přípustného přidělení k pracovníků na dané úkoly je ekvivalentní neexistenci okamžiku s více než k překrývajícími se úkoly. V přirozenějším jazyce totéž řekneme takto:
k pracovníků na úkoly stačí, právě když nikdy není více než k současných úkolů.

Fakt: Nechť I označuje průnikový graf intervalů daných pracovních úkolů. Pak přípustného přidělení k pracovníků na tyto úkoly je modelováno jako grafový homomorfismus $p : I \to K_k$.

Naopak ℓ překrývajících se úkolů je v grafu I ukázáno jako grafový homomorfismus $q : K_\ell \to I$. Takže ve shrnutí můžeme naši úvahu formálně zapsat

$$\exists\, p : I \to K_k \iff \neg\exists\, q : K_{k+1} \to I\,.$$

V případě toků v sítích platí, že tok velikosti t existuje, právě když není v síti žádný řez menší než t.

V obecnosti můžeme podat následující hrubý popis, kterému říkáme *princip dobré charakterizace*:

Konvence 2.11. Říkáme, že optimalizační problém má *dobrou charakterizaci*, pokud optimalitu nalezeného řešení můžeme vždy prokázat nalezením řešení jiné ("duální") úlohy, jehož ověření je "výrazně snažší" (či názornější) než bylo samotné vyřešení úlohy.

Poznámka: V obecnosti se princip dobré charakterizace neomezuje jen na optimalizační úlohy (kde je výrazně spojen s pracemi Edmondse), ale je to důležitý tzv. kategoriální pojem v matematice: Existence jednoho "morfismu" je dána neexistencí jiného "morfismu". Například v kombinatorice najdeme mnoho důležitých příkladů takových strukturálních charakterizací. To je však daleko za obsahem našeho předmětu.