5 Dualita úloh LP

V návaznosti na předchozí teoretickou lekci nyní zavedeme užitečný pojem *duality* úloh LP, který nám mimo jiné poskytne *dobrou charakterizaci optimálních řešení* LP.

Platí totiž, že původní (primární) i duální úloha mají zároveň optimální řešení stejné účelové hodnoty.

Zjednodušeně řečeno, duální úloha k úloze v základním tvaru se získá transpozicí matice úlohy a záměnou účelového vektory s vektorem pravých stran, při současné změně směru nerovností.

Stručný přehled lekce

- Dualita úloh LP v základním tvaru, slabá věta o dualitě.
- Dobrá charakterizace, silná věta o dualitě.
- Obecný tvar duální úlohy LP.

5.1 Základní tvar duality

Běžná (a snadno zapamatovatelná) definice duální úlohy LP se vztahuje k formulaci původní úlohy (zvané *primární úloha*) v základním tvaru, ale později si ukážeme, jak lze převést na duální i úlohu LP v obecném tvaru.

Definice 5.1. Duální úlohou LP k úloze v základním tvaru

$$\max\ \vec{c}\cdot\vec{x} \ \text{ pro } \ \boldsymbol{A}\cdot\vec{x}\leq\vec{b},\ \vec{x}\geq 0$$

je úloha

$$\min\ \vec{b}\cdot\vec{y} \ \text{ pro } \ \vec{y}\cdot\boldsymbol{A}\geq\vec{c},\ \vec{y}\geq 0\,.$$

Složky vektoru $\vec{y}$ jsou tzv. *duální proměnné*.

Jinými slovy, při formulaci duální úlohy přiřadíme nové (duální) proměnné y_j jednotlivým nerovnicím primární úlohy, matici $\boldsymbol{A}$ transponujeme a vektory účelový $\vec{c}$ a pravých stran $\vec{b}$ vzájemně zaměníme. Nově získané duální nerovnosti budou v opačném směru a duální účelová funkce $\vec{b}\cdot\vec{y}$ se bude minimalizovat. I duální proměnné budou všechny nezáporné.

Příklad 3.1 o hranolkách a lupíncích vede na níže zapsanou duální úlohu LP.

$$\begin{array}{rcl} \max\ 80x_1+50x_2: & & \\ 2x_1+1.5x_2 & \leq & 100 \\ 0.4x_1+0.2x_2 & \leq & 16 \\ x_1,x_2 & \geq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min\ 100y_1+16y_2: & & \\ 2y_1+0.4y_2 & \geq & 80 \\ 1.5y_1+0.2y_2 & \geq & 50 \\ y_1,y_2 & \geq & 0 \end{array}$$

V obecnějším zápise (pro názornější pochopení a zapamatování) vypadá dualita úloh v základním tvaru takto:

Primární úloha:

$$\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n :$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Duální úloha:

$$\min\ b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m :$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & \ldots & y_m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$$

Rozeberte si sami pro sebe, proč dvojí aplikací duality získáme zpět původní úlohu!

Důležitost duální úlohy při dobré charakterizaci optimálních řešení úloh LP vyplývá z následujících tvrzení o dualitě.

Věta 5.2. (Slabá věta o dualitě LP)

Nechť x^o *je přípustným řešením (maximalizační) primární úlohy* $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$ *a* y^o *je přípustným řešením (minimalizační) duální úlohy* $\vec{y} \cdot \boldsymbol{A} \geq \vec{c}$, $\vec{y} \geq 0$. *Pak*

$$\vec{c} \cdot \vec{x}^o \leq \vec{b} \cdot \vec{y}^o \, .$$

Důkaz: $\vec{c} \cdot \vec{x}^o \leq (\vec{y}^o \cdot \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x}^o = \vec{y}^o \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \vec{x}^o) \leq \vec{y}^o \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{y}^o$. □

Důsledek 5.3. *Máme-li přípustná řešení* $\vec{x}^o, \vec{y}^o$ *jako ve Větě 5.2 a navíc* $\vec{c} \cdot \vec{x}^o = \vec{b} \cdot \vec{y}^o$, *pak* $\vec{x}^o$ *je primárním optimálním řešením a* $\vec{y}^o$ *duálním optimem.*

Důkaz sporem: Nechť existuje lepší řešení $\vec{x}^1$, tj. $\vec{c} \cdot \vec{x}^1 > \vec{c} \cdot \vec{x}^o$. Pak ale $\vec{c} \cdot \vec{x}^1 > \vec{c} \cdot \vec{x}^o = \vec{b} \cdot \vec{y}^o$, z čehož plyne spor s $\vec{c} \cdot \vec{x}^1 \leq \vec{b} \cdot \vec{y}^o$ podle Věty 5.2. □

5.2 Silná dualita

V souvislosti s užitečným Důsledkem 5.3 se přirozeně nabízí otázka, zda vždy nalezneme přípustná řešení primární a duální úlohy o stejných účelových hodnotách.

Pochopitelně, pokud primární úloha nemá optimální řešení, ať už z důvodu nepřípustnosti nebo neomezenosti, tak odpovídající duální řešení nenajdeme. Ve všech ostatních případech však ano:

Věta 5.4. (Silná věta o dualitě LP)
Nechť $\vec{x}^o$ je optimálním řešením primární úlohy

$$\max\ \vec{c}\cdot\vec{x} \textit{ pro } \boldsymbol{A}\cdot\vec{x}\leq\vec{b},\ \vec{x}\geq 0\,.$$

Pak existuje přípustné řešení $\vec{y}^o$ příslušné duální úlohy takové, že

$$\vec{c}\cdot\vec{x}^o=\vec{b}\cdot\vec{y}^o\,.$$

Poznámka: Důsledek 5.3 spolu s Větou 5.4 dává dobrou charakterizaci pro všechny řešitelné úlohy LP – pro důkaz optimality našeho řešení vždy najdeme přípustné duální řešení stejné účelové hodnoty.

Důkaz: Fakt, že přípustný vektor $\vec{x}^o$ je optimálním řešením dané primární úlohy lze jinak vyjádřit tvrzením, že neexistuje její přípustné řešení s hodnotou $\vec{c} \cdot \vec{x} \geq \vec{c} \cdot \vec{x}^o + \varepsilon$ pro žádné $\varepsilon > 0$, tedy že rozšířená úloha

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\vec{c} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} \leq \begin{pmatrix} \vec{b} \\ -\vec{c} \cdot \vec{x}^o - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \geq 0$$

nemá žádné přípustné řešení. Nyní aplikujeme (Farkasovo lema) Důsledek 4.8. Podle něj existuje nezáporná kombinace nerovností rozšířené úlohy, která je sporná. Formálně, existuje $\vec{y} \geq 0$ takový, že

$$\vec{y} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\vec{c} \end{pmatrix} \geq 0, \quad \vec{y} \cdot \begin{pmatrix} \vec{b} \\ -\vec{c} \cdot \vec{x}^o - \varepsilon \end{pmatrix} < 0\,. \tag{1}$$

V prvé řadě si uvědomme, že poslední souřadnice $\vec{y}$ musí být kladná, neboť teprve poslední nerovnost rozšířené soustavy způsobuje její neřešitelnost. Takže lze (po normalizaci) psát $\vec{y} = (\vec{y}^o, 1)$. Rozepsáním vztahů (1) pak dostáváme

$$\vec{y}^o \cdot \boldsymbol{A} \geq \vec{c}, \quad \vec{y}^o \cdot \vec{b} < \vec{c} \cdot \vec{x}^o + \varepsilon\,.$$

Jelikož poslední vztah platí pro libovolně malé $\varepsilon > 0$, limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ získáme

$$\vec{y}^o \cdot \boldsymbol{A} \geq \vec{c}, \;\; \vec{y}^o \geq 0, \quad \vec{y}^o \cdot \vec{b} \leq \vec{c} \cdot \vec{x}^o\,.$$

Vidíme tedy, že y^o je přípustným řešením příslušné duální úlohy a navíc podle Důsledku 5.3 je $\vec{y}^o \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{x}^o$. $\square$

5.3 Obecný tvar duality LP

Duální úlohu LP lze pochopitelně sestavit i k úloze LP v obecném tvaru. Pro toto můžeme nakonec použít základní Definici 5.1 a přidat postup podle důkazu Věty 3.5 (nahrazovat vztahy a proměnné dvakrát – před i po duální konstrukci).

Fakt: Pro obecný tvar úlohy LP je *duální úloha* schematicky naznačena takto:

$$\begin{array}{rcl} \max\ \vec{c}\cdot\vec{x}+\vec{d}\cdot\vec{x}' : & & \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x}' \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \le \\ = \end{array} & \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \\ \vec{x} & \ge & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \min\ \vec{a}\cdot\vec{y}+\vec{b}\cdot\vec{y}\,' : & & \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{C}^T \\ \boldsymbol{B}^T & \boldsymbol{D}^T \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \vec{y} \\ \vec{y}\,' \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \ge \\ = \end{array} & \begin{pmatrix} \vec{c} \\ \vec{d} \end{pmatrix} \\ \vec{y} & \ge & 0 \end{array}$$

Jinými slovy, při formulaci obecné duální úlohy přiřadíme nové (duální) proměnné y_j jednotlivým nerovnicím i rovnicím primární úlohy. Přitom duální proměnná odpovídající nerovnosti bude nezáporná, kdežto ta odpovídající rovnosti bude neomezená. Analogicky duální vztahy odpovídající sloupcům nezáporných primárních proměnných budou nerovnostmi, kdežto ty odpovídající neomezeným primárním proměnným budou vyjádřeny jako duální rovnosti. Opět vektory účelový a pravých stran vzájemně zaměníme. Nově získané duální nerovnosti budou v opačném směru a duální účelová funkce se bude minimalizovat.