7 Výpočet simplexové metody

V této přednášce si ukážeme krok za krokem základní způsob implementace simplexové metody pomocí “pivotování” simplexové tabulky (Oddíl 6.4). To znamená, že od teorie přejdeme úplně k praktickým dovednostem a zkušenostem s řešením úloh LP.

Některé pokročilejší úkony, jako přidávání umělých proměnných pro získání výchozího řešení, nebo použití lexikografického pravidla pro prevenci možného zacyklení, budou doplněny a probrány hlouběji v příští lekci.

Stručný přehled lekce

- Ilustrační výpočet simplexové metody.
- Sloupcové a řádkové pravidlo, pivotování.
- Formální popis implementace simplexové metody.
- Příklady různých výpočtů.

7.1 Ilustrační výpočet

Vraťme se k základnímu Příkladu 3.1 s bramborovými lupínky a hranolky. Po vynásobení 10 (jen pro zbavení se necelých čísel) zadání zní:

$$
\begin{aligned}
\max\ 80x_1 + 50x_2 & & \\
20x_1 + 15x_2 & \leq & 1000 \\
4x_1 + 2x_2 & \leq & 160 \\
x_1, x_2 & \geq & 0
\end{aligned}
$$

Tuto snadnu úlohu si nyní vyřešíme v podrobných komentovaných krocích.

- Převedeme úlohu na kanonický tvar

$$
\begin{array}{rrrcl}
\max\ 80x_1 + 50x_2 & & & & \\
20x_1 + 15x_2 & +x_3 & & = & 1000 \\
4x_1 + 2x_2 & & +x_4 & = & 160 \\
x_1, x_2, & x_3, x_4 & & \geq & 0
\end{array}
$$

- Chceme maximalizovat funkci $80x_1 + 50x_2$, neboli
$$\min\ x_0\ , \quad \text{kde}\quad x_0 + 80x_1 + 50x_2 = 0\,.$$
Máme (s implicitní nezáporností proměnných) tedy soustavu rovnic
$$\begin{array}{rrrrcl} x_0 + 80x_1 + 50x_2 & & & & = & 0 \\ 20x_1 + 15x_2 & +x_3 & & & = & 1000 \\ 4x_1 + 2x_2 & & & +x_4 & = & 160\,, \end{array}$$
zapsáno maticově
$$\begin{bmatrix} 1 & 80 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1000 \\ 160 \end{bmatrix}.$$

- V simplexové tabulce (*účelový řádek* proměnné x_0 nahoře) a s vyznačenou jednotkovou bází vypadá naše úloha takto:

1	80	50	**0**	**0**	0
0	20	15	**1**	**0**	1000
0	4	2	**0**	**1**	160

Tato tabulka ukazuje výchozí bázické řešení $x_3 = 1000, x_4 = 160$, $x_1, x_2 = 0$ ($x_0 = 0$), které je (naštěstí) přípustné. Pro jednoduchost už dále nebudeme účelový (nultý) řádek do tabulky zapisovat.

- Přejdeme k sousední bázi, čili vyměníme jeden sloupec ve vyznačené bázi.

  Přesněji nejprve vybereme nový sloupec do báze pomocí *sloupcového pravidla* a pak vybereme stávající sloupec báze k odebrání pomocí *řádkového pravidla*. Nakonec použijeme běžné maticové operace k tomu, abychom novou bázi ukázali jako jednotkovou.

  - Sloupcové pravidlo: Vybereme sloupec s, který má v nultém řádku největší z kladných redukovaných cen. Zde $s = 1$.
  - Řádkové pravidlo: Vybereme řádek $i > 0$, který splňuje $a_{is} > 0$ a zároveň dosahuje nejmenší z podílů b_i/a_{is}. (Uvědomme si, že vždy $b_i \geq 0$.) Zde $i = 2$.
  - Provedeme *pivot* na prvku $a_{i,s}$ matice: Řádkovými úpravami matice (jako v Gaussově eliminaci) sloupec s upravíme tak, aby obsahoval samé nuly (včetně nultého řádku) mimo $a_{i,s} = 1$.

$$
\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
80 & 50 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 \\
\hline
20 & 15 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 1000 \\
4 & 2 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 160 \\
\hline
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{|cccc|c|}
\hline
\mathbf{0} & 10 & \mathbf{0} & -20 & -3200 \\
\hline
\mathbf{0} & 5 & \mathbf{1} & -5 & 200 \\
\mathbf{1} & 0.5 & \mathbf{0} & 0.25 & 40 \\
\hline
\end{array}
$$

Co nám nová tabulka ukazuje o současném bázickém řešení $\vec{x}$?

$$
\begin{aligned}
&x_0 = -3200 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{x} = 3200, \\
&x_1 = 40,\ x_3 = 200, \\
&x_2 = x_4 = 0 \quad \text{(protože nejsou v bázi).}
\end{aligned}
$$

- Opět vybereme podle téhož sloupcového pravidla sloupec $s = 2$ a podle řádkového pravidla řádek $i = 1$. Novým pivotem získáme:

$$\begin{array}{|cccc|c|}\hline \mathbf{0} & 10 & \mathbf{0} & -20 & -3200 \\ \hline \mathbf{0} & 5 & \mathbf{1} & -5 & 200 \\ \mathbf{1} & 0.5 & \mathbf{0} & 0.25 & 40 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cccc|c|}\hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2 & -30 & -3600 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0.2 & -1 & 40 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & -0.1 & 0.75 & 20 \\ \hline \end{array}$$

Nyní již sloupcové pravidlo nelze použít, neboť redukované ceny v nultém řádku jsou všechny nekladné. To znamená, že jsme našli *optimální řešení* $\vec{x}^o$ úlohy

$$x_0 = -3600 \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \cdot \vec{x}^o = 3600,$$
$$x_1^o = 40,\ x_2^o = 20,$$
$$x_3^o = x_4^o = 0 \quad \text{(protože nejsou v bázi).}$$

□

Poznámka k řádkovému pravidlu: Co by se stalo kdybychom vybrali jiný řádek než s nejmenším podílem b_i / a_{is}? Zkusme si to v předchozí úloze:

$$\begin{array}{|cccc|c|}\hline \mathbf{0} & 10 & \mathbf{0} & -20 & -3200 \\ \hline \mathbf{0} & 5 & \mathbf{1} & -5 & 200 \\ \mathbf{1} & 0.5 & \mathbf{0} & 0.25 & 40 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cccc|c|}\hline -20 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -25 & -4000 \\ \hline -10 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & -7.5 & -200 \\ 2 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0.5 & 80 \\ \hline \end{array}$$

Jak vidíme, nové bázické řešení obsahuje $x_3 = -200 < 0$, takže není přípustné. Výběr řádku i je volen dle uvedeného řádkového pravidla právě proto, abychom dostali ve všech složkách pravé strany $\vec{b}$ nezáporné, tj. přípustné hodnoty.

7.2 Popis implementace

Tvrzení 7.1. *Mějme pro danou úlohu LP zápis simplexovou tabulkou v přípustném jednotkovém tvaru. Pokud přejdeme k nové bázi tabulky získané ze stávající báze záměnou některého bázického sloupce sloupcem s kladnou redukovanou cenou, tak získáme buď stejné degenerované bázické řešení nebo řešení se striktně lepší účelovou hodnotou.*

Algoritmus 7.2. Implemenace Algoritmu 6.4 simplexové metody
Následuje jednofázová metoda bez prevence zacyklení v degenerovaných řešeních.

0. Úlohu převedeme do základního a pak do kanonického tvaru

$$\max\ \vec{c}\cdot\vec{x} \quad \text{pro} \quad \boldsymbol{A}\cdot\vec{x} = \vec{b}, \quad \vec{x}\geq 0$$

přidáním *doplňkových proměnných* ke každé nerovnici (Lemma 6.1). Dále přidáme pro redukovaný zápis novou *účelovou* proměnnou x_0 vztahem

$$\min\ x_0 \quad \text{pro} \quad x_0+\vec{c}\cdot\vec{x}=0\,.$$

1. Zapíšeme maticově předchozí vztahy a odpovídající *simplexovou tabulkou*

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{c} \\ \vec{0} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_0 \\ \vec{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{b} \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \vec{c} & 0 \\ \vec{0} & \boldsymbol{A} & \vec{b} \end{array}\right].$$

Horní (nultý) řádek tabulky nazýváme *účelovým řádkem*, jeho prvky jsou *redukované ceny proměnných*, sloupec $\vec{b}$ nazýváme *pravou stranou* a zbytek tabulky nazýváme *levou stranou*.
V dalším textu již budeme tabulku zapisovat bez nultého účelového sloupce.

Dále získáme *výchozí přípustné bázické řešení*.

K tomu potřebujeme tabulku v přípustném jednotkovém tvaru. Často tabulka již v takovém tvaru je (doplňkové proměnné nám přidají jednotkovou podmatici a pravé strany obvykle bývají kladné), ale jinak uplatníme následující postup:

a) Všechny rovnice se zápornou pravou stranou vynásobíme -1. (Aby bylo výchozí bázické řešení přípustné.)

b) Pro každý chybějící jednotkový vektor $\vec{e}^{\,i}$ v tabulce na levé straně přidáme *umělou proměnnou* $u_i \geq 0$ s cenou $-\nu$, kde ν je velmi velká konstanta, formálně $\nu = \infty$.

Zapíšeme vzniklou výchozí ("umělou") tabulku v jednotkovém tvaru

$$\left[\begin{array}{c|c} \vec{c} \;\; \ldots \;\; 0 \;\; -\nu & 0 \\ \hline \underbrace{\boldsymbol{A}' \;\middle|\; \boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{A}^u} & \vec{b}' \end{array}\right],$$

která vyjadřuje vztahy:

$$\begin{aligned} x_0 + \vec{c}\cdot\vec{x} - \nu\cdot\vec{u} &= 0 \\ \boldsymbol{A}^u \cdot (\vec{x},\vec{u})^T &= \vec{b} \\ \vec{x},\vec{u} &\geq 0 \end{aligned}$$

c) Upravíme tabulku tak, aby i nultý účelový řádek obsahoval redukované ceny 0 ve sloupcích jednotkové podmatice $\boldsymbol{I}$: Přičteme násobky řádků příslušných k jednotlivým jednotkovým vektorům $\boldsymbol{I}$ k účelovému řádku.

2. Jsou-li všechna čísla v účelovém řádku tabulky nekladná, máme optimální řešení, viz Tvrzení 6.8. Pokud však je v bázi stále ještě zůstává některá umělá proměnná, původní úloha nemá *žádné přípustné řešení*.

3. Je-li v tabulce sloupec s takový, že $c_s = a_{0s} > 0$ a $a_{is} \leq 0$ pro všechna $i > 0$, úloha nemá optimální řešení z *důvodu neomezenosti*.

4. Přejdeme k sousední bázi:

a) *Sloupcové pravidlo* vybere sloupce s s nejvyšší kladnou hodnotou redukované ceny v účelovém řádku, tj. ve směru nejvyššího přírustku účelové funkce.

b) *Řádkové pravidlo* vybere řádek $i > 0$ s nejmenší hodnotou podílu b_i/a_{is} pro $a_{is} > 0$, což je nutné pro zachování nezápornosti pravé strany.

c) Přejdeme k *sousední bázi* aplikací tzv. *pivotu* na prvku a_{is}:

- Pro každé $j \neq i$, od j-tého řádku odečteme a_{js}/a_{is}-násobek i-tého,
- i-tý řádek vydělíme číslem a_{is}.

(V nové bázi sloupec s nahradí sloupec původního jednotkového vektoru $\vec{e}^{\,i}$.)

5. Vrátíme se v cyklu do bodu **2**.

7.3 Různé příklady výpočtů

Příklad 7.3. *Dokončení výpočtu Příkladu 6.10.*

$$\begin{aligned} \max\ 387x_1 + 524x_2 + 667x_3 & & \\ 15x_1 + 20x_2 + 20x_3 &\leq & 1000 \\ 63x_1 + 126x_2 + 133x_3 &\leq & 5000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq & 0 \end{aligned}$$

Zmíněný příklad vedl na následující výchozí simplexovou tabulku, která je v přípustném jednotkovém tvaru.

387	524	667	0	0	0
15	20	20	**1**	**0**	1000
63	126	133	**0**	**1**	5000

Jsme v Algoritmu 7.2 v bodě 4. Užitím sloupcového pravidla vybereme třetí sloupec pro vstup do báze a pak řádkovým pravidlem druhý řádek pro opuštění báze. Výsledkem je:

71.05	−107.9	0	0	−5.015	−25075
5.526	1.053	0	1	−0.15	248.1
0.4737	0.9474	1	0	0.00752	37.6

V další iteraci vybereme první sloupec a první řádek a výsledkem je tabulka:

0	-120.9	0	-12.84	-3.08	-28265
1	0.19	0	0.18	-0.027	44.88
0	0.8571	1	-0.0857	-0.02	16.33

Z poslední tabulky vidíme (viz Algoritmus 7.2 v bodě 2), že optimálním řešením je výroba (zhruba) 448.8 kg hranolků, 0 kg slaných lupínků a 163.3 kg paprikových lupínků se ziskem 28265 Kč. □

Příklad 7.4. *Ukázka výpočtu neomezené úlohy LP:*

$$
\begin{aligned}
\max\ x_1 + x_2 + x_3 & & \\
-x_1 - x_2 + 2x_3 & \leq & 2 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 & \leq & 4 \\
2x_1 - x_2 - x_3 & \leq & 6 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0
\end{aligned}
$$

Již dobře známým postupem přes kanonický tvar úlohy zapíšeme výchozí simplexovou tabulku v jednotkovém přípustném tvaru

1	1	1	0	0	0	0
-1	-1	2	**1**	**0**	**0**	2
-1	2	-1	**0**	**1**	**0**	4
2	-1	-1	**0**	**0**	**1**	6

.

Dále postupujeme v intencích Algoritmu 7.2 následovně:

0	1.5	1.5	0	0	-0.5	-3
0	-1.5	1.5	1	0	0.5	5
0	1.5	-1.5	0	1	0.5	7
1	-0.5	-0.5	0	0	0.5	3

0	0	**3**	0	-1	-1	-10
0	0	0	1	1	1	12
0	1	-1	0	0.66	0.33	4.66
1	0	-1	0	0.33	0.66	5.33

Dobře si nyní všimněme poslední tabulky. V ní se stále ještě neuplatní bod 2 Algoritmu 7.2, stále nemáme optimální řešení díky kladné redukované ceně ve třetím sloupci. Poprvé mezi našimi příklady však vidíme uplatnění bodu 3 algoritmu – ve třetím sloupci jsou všechny další koeficienty nekladné, takže optimální řešení naší úlohy neexistuje z důvodu neomezenosti. □

Příklad 7.5. *Vyřešme náš starý známý Příklad 3.1 o lupíncích a hranolcích s dodatečným požadavkem na výrobu alespoň 30 kg lupínků.*

Podmínky jsou zapsány

$$\begin{array}{rrcl} \max & 80x_1 + 50x_2 & & \\ & 20x_1 + 15x_2 & \leq & 1000 \\ & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 160 \\ & x_1 & \geq & 30\,. \end{array}$$

V kanonickém tvaru pak úloha zní

$$\begin{array}{rlllr} \max & 80x_1 + 50x_2 & & & \\ & 20x_1 + 15x_2 & +x_3 & & = 1000 \\ & 4x_1 \quad + 2x_2 & & +x_4 & = 160 \\ & x_1 & & & -x_5 = 30 \\ & \quad x_1, x_2, & & & x_3, x_4, x_5 \geq 0\,, \end{array}$$

což bohužel nedává tabulku v jednotkovém tvaru. Jsme Algoritmu 7.2 v bodě 1 (a,b). Budeme proto muset přidat jednu umělou proměnnou $u = x_6$ následovně:

$$
\begin{array}{llllll}
\max & 80x_1 + 50x_2 & & & -\nu\, x_6 & \\
& 20x_1 + 15x_2 & +x_3 & & & = \ 1000 \\
& 4x_1 \ \ + 2x_2 & & +x_4 & & = \ 160 \\
& x_1 & & & -x_5 + x_6 & = \ 30 \\
& \quad x_1, x_2, & & x_3, x_4, x_5, x_6 & & \geq \ 0\,,
\end{array}
$$

Zavedení umělé proměnné x_6 pochopitelně mění–rozšiřuje množinu přípustných řešení úlohy, takže v konečném důsledku musíme vliv x_6 z úlohy vyloučit. Toho dosáhneme určením "obrovské" záporné ceny $-\nu \sim -\infty$ pro x_6.

Nyní již můžeme sestavit výchozí tabulku v přípustném jednotkovém tvaru. Nezapomeňme však podle Algoritmu 7.2 v bodě 1 (c) nejprve upravit nenulovou hodnotu redukované ceny x_6 přičtením vhodného násobku posledního řádku.

80	50	0	0	0	$-\nu$	0
20	15	1	0	0	0	1000
4	2	0	1	0	0	160
1	0	0	0	-1	1	30

$\longrightarrow$

$80+\nu$	50	0	0	$-\nu$	0	30
20	15	**1**	**0**	0	**0**	1000
4	2	**0**	**1**	0	**0**	160
1	0	**0**	**0**	-1	**1**	30

Dále již postupujeme běžným způsobem simplexové metody.

$80+\nu$	50	0	0	$-\nu$	0	30
20	15	**1**	**0**	0	**0**	1000
4	2	**0**	**1**	0	**0**	160
1	0	**0**	**0**	-1	**1**	30

0	50	0	0	80	$-80-\nu$	-2400
0	15	**1**	**0**	20	-20	400
0	2	**0**	**1**	4	-4	40
1	0	**0**	**0**	-1	1	30

0	0	0	-25	-20	$100-\nu$	-3400
0	**0**	**1**	-7.5	-10	10	100
0	**1**	**0**	0.5	2	-2	20
1	**0**	**0**	0	-1	1	30

Z poslední tabulky vidíme optimální řešení – vyrobit $x_1 = 30\,\mathrm{kg}$ lupínků a $x_2 = 20\,\mathrm{kg}$ hranolků. Hodnota $x_3 > 0$ nám říká, že v první nerovnosti úlohy ještě zbývá do rovnosti rezerva x_3, neboli v konkrétní formulaci nám zbývá $10\,\mathrm{kg}$ brambor. □