Složitost

Složitost *algoritmu* vyjadřuje náročnost algoritmu na různé zdroje v průběhu výpočtu: čas výpočtu, velikost paměti, počet procesorů apod. Podle toho rozlišujeme různé *míry složitosti*.

Míry složitosti:

– časová

– prostorová (paměťová)

– procesorová (hardwarová)

$\vdots$

Pro definici časové resp. prostorové složitosti zavedeme pojmy *délka výpočtu* resp. *množství výpočtem spotřebované paměti*. K přesné definici obou pojmů však potřebujeme tzv. *výpočetní model*. Jeho definice závisí na *výpočetním paradigmatu*.

Například pro Turingův stroj délkou výpočtu počet výpočetních kroků, tj. vnitřních přechodů. Pro RAM je to počet provedených instrukcí. Pro funkcionální jazyk je to počet jednokrokových redukcí.

Složitost *problému* je je zavedena jako složitost optimálního algoritmu řešícího tento problém. Na řešení nějakého problému můžeme použít mnoho různých algoritmů. Časovou složitostí problému pak rozumíme časovou složitost algoritmu, který řeší daný problém (i na „nejpomalejších datech“) nejrychleji. Prostorovou složitostí problému rozumíme prostorovou složitost algoritmu, který řeší daný problém (i na nejméně příznivých datech) v nejmenší paměti apod.

Příklad:

- Řešíme problém: seřadit vzestupně n-prvkovou posloupnost celých čísel.
- K řešení použijeme algoritmus řazení vkládáním.
- Naše konkrétní posloupnosti, které budou vstupem, jsou $3, 6, 9, \ldots, 3n$ (tj. jsou už seřazené).

Rozlišujeme tři pojmy:

- časovou složitost problému
- časovou složitost algoritmu
- délku výpočtu

Délka výpočtu algoritmem `iInsSort` na rostoucí posloupnosti délky n je $6n - 4$ (tolik se provede výpočetních kroků).

Časová složitost algoritmu `iInsSort` je vyjádřena kvadratickým polynomem $an^2 + bn + c$, jak později uvidíme. Je tedy větší než délka výpočtu na našich (příznivých) datech. Na jiných posloupnostech délky n stejný algoritmus stráví času více. V nejhorším případě až kvadraticky mnoho, proto je časová složitost algoritmu řazení vkládáním kvadratická.

Časová složitost problému vzestupného seřazení posloupnosti je však lepší než kvadratická: existují algoritmy, které n-prvkovou posloupnost seřadí v čase $c\,n \log n$ (c je konstanta), a to i v nejhorším případě (tj. i pro „nejzlomyslněji zadané“ vstupní posloupnosti). Proto je časová složitost problému řazení vyjádřena funkcí $c\,n \log n$ (v proměnné n).

Délka výpočtu výrazů

Délku výpočtu výrazu e označíme $\tau(e)$.

$\tau(e)$ je rovna součtu délek vyhodnocení všech operací, které výraz e obsahuje.

Vyhodnocení elementárních aritmetických, logických, relačních operací nad skalárními operandy je konstantní. Proto i délku výpočtu výrazu, který obsahuje pouze tyto jednoduché operace, považujeme za konstantní.

Obsahuje-li však výraz e volání složitějších funkcí, je nutno započítat délku jejich výpočtu do $\tau(e)$.

Přesněji:
$\tau(c) = 0$, je-li c konstanta,
$\tau(v) = 1$, je-li c odkaz na hodnotu skalární (přepisovatelné) proměnné. Tedy zpřístupnění obsahu proměnné považujeme za jednotkovou operaci.

$\tau(\textit{op}\, a) = 1 + \tau(a)$, kde *op* je primitivní unární operátor, který vyhodnocuje svůj operand, například `not`.

$\tau(a \oplus b) = 1 + \tau(a) + \tau(b)$, kde $\oplus$ je některý z primitivních binárních operátorů, které vyhodnocují oba svoje operandy, například $+, -, *, /, \texttt{div}, \texttt{mod}, <, \leq, >, \geq, \ldots$.

Pozor, některé operátory a jazykové konstrukce nemusí vždy vyhodnocovat všechny svoje operandy. Podle toho se pak určuje délka výpočtu výrazů:

$\tau(a\ \texttt{\&\&}\ b) = 1 + \tau(a) + \tau(b)$ pro a pravdivé
$\tau(a\ \texttt{\&\&}\ b) = 1 + \tau(a)$ pro a nepravdivé

$\tau(a\ \texttt{||}\ b) = 1 + \tau(a) + \tau(b)$ pro a nepravdivé
$\tau(a\ \texttt{||}\ b) = 1 + \tau(a)$ pro a pravdivé

$\tau(\texttt{if}\ a\ \texttt{then}\ b\ \texttt{else}\ c) = 1 + \tau(a) + \tau(b)$ pro a pravdivé
$\tau(\texttt{if}\ a\ \texttt{then}\ b\ \texttt{else}\ c) = 1 + \tau(a) + \tau(c)$ pro a nepravdivé

Délka výpočtu volání funkce

Deklarace:
`f` $(x_1, \ldots, x_n)$ `=` e
Volání hodnotou (striktní aplikace):
$\tau(\texttt{f}(a_1, \ldots, a_n)) = 1 + \tau(a_1) + \cdots + \tau(a_n) + \tau(e'')$, kde výraz e'' vznikne z výrazu e nahrazením každého výskytu x_i *hodnotou* výrazu a_i.

Volání jménem (normální aplikace):
$\tau(\texttt{f}(a_1, \ldots, a_n)) = 1 + \tau(e')$, kde výraz e' vznikne z výrazu e nahrazením každého výskytu x_i *celým nevyhodnoceným výrazem* a_i.

Bude-li nás zajímat pouze tzv. *asymptotické chování* složitosti algoritmů, budeme ztotožňovat složitosti lišící se jen kladnou multiplikativní konstantou. Pro takové případy bude užitečná následující

Úmluva: Je-li e výraz obsahující jen skalární konstanty a proměnné a elementární operace (na skalárních hodnotách), klademe délku jeho výpočtu rovnu jedné.

Výraz e zejména nesmí obsahovat vektorové operace (např. aritmetické operace na „dlouhých“ číslech) ani volání uživatelských funkcí.

Tuto úmluvu zavádíme proto, že pro účely zjišťování asymptotického chování algoritmů je praktičtější například uvažovat délku přiřazení `x:=a*(b+c+d)` rovnu jedné, než ji počítat jako $1 + 1 + 2 + 5$. Stejně víme, že součet je roven konstantě, a to nám stačí.

U tzv. „čistých“ výrazů předpokládáme, že nemají vedlejší efekty. To však nemusí vždy platit. Délka výpočtu výrazů, které obsahují volání funkcí, závisí najen na samotném výrazu, ale i na *stavu*, v němž se výraz vyhodnocuje. Stavem rozumíme okamžitý obsah programových (přepisovatelných) proměnných. V jazycích s vedlejšími efekty se stav během výpočtu mění.

Příklad:

```
var a:Integer;
function f (n:Integer):Integer;
 var i,k:Integer;
 begin k := 0;
       for i:=0 to n*a do
           k := k+i;
       a := k;
       f:=a  {return a}
 end
```

Globální přepisovatelná proměnná `a` má na začátku hodnotu 2, pak ve výrazu `f(4)+f(4)` trvá každé vyhodnocení stejného podvýrazu `f(4)` různou dobu. (Jakou?)

Délka výpočtu příkazů

Nechť S je množina stavů, $\sigma \in S$. Každý příkaz p funguje jako *stavový transformátor* $\nu(p) : S \dashrightarrow S$.

Délku výpočtu příkazu p ve stavu σ označíme $\tau(p, \sigma)$.

Prázdný příkaz

$\tau(\texttt{skip}, \sigma) = 0$ pro libovolný stav σ

Přiřazovací příkaz

$\tau(\texttt{v:=}e, \sigma) = 1 + \tau(e, \sigma)$, je-li v jednoduchá přepisovatelná proměnná

Sekvence

$$\tau(\texttt{begin}\, p_1\, \texttt{;} \ldots \texttt{;}\, p_k\, \texttt{end}, \sigma_0) = \sum_{i=1}^{k} \tau(p_i, \sigma_{i-1}), \quad \text{kde } \sigma_i = \nu(p_i)(\sigma_{i-1})$$

Větvení

Nechť σ je stav, p, q příkazy, e výraz a $\sigma' = \nu(e)(\sigma)$.

$$\tau(\mathtt{if}\, e\, \mathtt{then}\, p\, \mathtt{else}\, q, \sigma) = \tau(e, \sigma) + \tau(p, \sigma') \quad \text{pro pravdivé } e,$$
$$\tau(\mathtt{if}\, e\, \mathtt{then}\, p\, \mathtt{else}\, q, \sigma) = \tau(e, \sigma) + \tau(q, \sigma') \quad \text{pro nepravdivé } e.$$

Pokud výraz e nemá vedlejší efekty, pak $\sigma = \sigma'$ a

$$\tau(\mathtt{if}\, e\, \mathtt{then}\, p\, \mathtt{else}\, q, \sigma) = \tau(e, \sigma) + \tau(p, \sigma) \quad \text{pro pravdivé } e,$$
$$\tau(\mathtt{if}\, e\, \mathtt{then}\, p\, \mathtt{else}\, q, \sigma) = \tau(e, \sigma) + \tau(q, \sigma) \quad \text{pro nepravdivé } e.$$

Cyklus while

Nechť $t = (\texttt{while}\ e\ \texttt{do}\ s)$ je příkaz cyklu a σ_n je stav takový, že ze stavu σ_0 příkaz cyklu t zopakuje právě n-krát své tělo s.

Pro $0 \leq i \leq n$ označme $\sigma_i' = \nu(e)(\sigma_i)$,
pro $0 \leq i < n$ označme $\sigma_{i+1} = \nu(s)(\sigma_i)$,
a nechť pro $0 \leq i < n$ je $\mu(e)(\sigma_i) =$ pravda, $\mu(e)(\sigma_n) =$ nepravda. Pak

$$\tau(t, \sigma_0) = \sum_{0 \leq i < n} \big(\tau(e, \sigma_i) + \tau(s, \sigma_i')\big) + \tau(e, \sigma_n)$$

Pokud výraz e nemá vedlejší efekty, pak $\sigma_i = \sigma_i'$ a

$$\tau(t, \sigma_0) = \sum_{0 \leq i < n} \big(\tau(e, \sigma_i) + \tau(s, \sigma_i)\big) + \tau(e, \sigma_n)$$

$\hat{T}$ značí množinu všech hodnot typu T, tzv. *doménu*.

Stejné rozšíření definice délky výpočtu se vztahuje i na výrazy s vedlejšími efekty.

Příkazy můžeme považovat za výrazy, které mají speciální hodnotu $\bullet$ typu `Com`. Sémantika každého příkazu je pak konstantní funkce, tj. pro libovolný příkaz p a stav σ je $\mu(p)(\sigma) = \bullet$.

Nechť `f` je funkce definovaná

$\texttt{f}\ \texttt{(}x_1\texttt{,}\ldots\texttt{,}x_n\texttt{)}\ \texttt{=}\ e$

a σ_0 je stav, ve kterém začne výpočet.

Pak buďto, v případě volání jménem,

$\tau(\texttt{f(}a_1,\ldots,a_n\texttt{)},\sigma_0) = 1 + \tau(e',\sigma_0)$, kde výraz e' vznikne z výrazu e (těla funkce `f`) nahrazením každého výskytu x_i *výrazem* a_i

anebo, v případě volání hodnotou,

$\tau(\texttt{f(}a_1,\ldots,a_n\texttt{)},\sigma_0) = 1 + \tau(a_1,\sigma_0) + \tau(a_2,\sigma_1) + \cdots + \tau(a_n,\sigma_{n-1}) + \tau(e'',\sigma_n)$,

kde $\sigma_i = \nu(a_i)(\sigma_{i-1})$ (pro $0 < i \leq n$) a výraz e'' vznikne z těla e takto:

$$
\begin{array}{lll}
e'' = & \texttt{begin} & x_1\texttt{:=}\mu(a_1)(\sigma_0)\texttt{;} \\
& & \vdots \\
& & x_n\texttt{:=}\mu(a_n)(\sigma_{n-1})\texttt{;} \\
& & e \\
& \texttt{end} &
\end{array}
$$

Délku výpočtu příkazu cyklu for můžeme odvodit tak, že si cyklus for vyjádříme pomocí cyklu while.

Nechť $t = (\texttt{for i:=}e \texttt{ to } e' \texttt{ do } s)$ je příkaz cyklu a σ je stav takový, že ze stavu σ příkaz cyklu t zopakuje právě n-krát své tělo s.

Označíme $\sigma_0 = \nu(\texttt{i:=}e)(\sigma)$,
pro $0 \leq i \leq n$ označíme $\sigma_i' = \nu(\texttt{i} \leq e')(\sigma_i)$,
a pro $0 \leq i < n$ označíme $\sigma_i'' = \nu(s)(\sigma_i')$, $\sigma_{i+1} = \nu(\texttt{i:=succ(i)})(\sigma_i'')$

Pak

$$\begin{aligned}\tau(t,\sigma) = \tau(\texttt{i:=}e)(\sigma) \\ &+ \sum_{0 \leq i < n} \left(\tau(\texttt{i} \leq e', \sigma_i) + \tau(s, \sigma_i') + \tau(\texttt{i:=succ(i)}, \sigma_i'')\right) \\ &+ \tau(\texttt{i} \leq e', \sigma_n)\end{aligned}$$

Většinou nás víc než délka jednoho konkrétního výpočtu zajímá, jak se daný algoritmus chová obecně, tj. jak vypadá množina délek všech možných výpočtů — pro množinu všech přípustných vstupních dat (vyhovujících vstupní podmínce).

Časová složitost algoritmu

Je-li *In* množina všech vstupních dat pro algoritmus A, pak pro $x \in$ *In* zavedeme číslo $|x| \in \mathbb{N}$, které nazveme *velikost* vstupní hodnoty x.

Počáteční stav výpočtu, který odpovídá umístění hodnoty x na vstupu, označíme σ_x.

Časovou složitost algoritmu A zavedeme jako jako funkci $T_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takto:

$$T_A(n) = \max\{\tau(A, \sigma_x) \mid |x| = n\}$$

Časová složitost algoritmu je tedy funkce, která pro každou velikost vstupních dat je rovna délce *nejdelšího* výpočtu na všech možných datech této velikosti.

Velikost vstupních dat odpovídá počtu bitů, kterými je vstupní údaj vyjádřen. V praxi má často tyto významy:

číslo n	délka jeho bitového zápisu, tj. $\lceil \log_2 n \rceil$
posloupnost čísel	počet jejích prvků
graf	počet uzlů $+$ počet hran

Protože množina v definici složitosti je většinou nekonečná, musíme hledané maximum určit *analýzou nejhoršího případu*.

V některých případech je výhodnější rozdělit velikost dat na dvě čísla (graf) a upravit definici složitosti $T_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Příklad: Algoritmus řazení vkládáním (imperativní verze – Pascal)

```
const MAX = 999;
type Elem = Integer;
     Posl = array [1..MAX] of Elem;
procedure iInsSort (n:Integer; var A:Posl);
  var i, j : Integer;  x : Elem;
  begin
      for i := 2 to n do
      begin
          x := A[i];  j := i-1;
          while (j>0) && (A[j]>x) do
          begin
              A[j+1] := A[j];
              j := j-1
          end;
          A[j+1] := x
       end
   end
```

Příklad: Analýza nejhoršího případu

Algoritmus: `iInsSort`
Vstup: posloupnost celých čísel $A = (a_1, \ldots, a_n)$
délky n.
Výstup: posloupnost celých čísel B, která je permutací posloupnosti A a přitom je neklesající.

Označme c_i délku výpočtu příkazu nebo testu na i-tém řádku algoritmu `iInsSort`, přičemž na sedmém řádku (v záhlaví cyklu for) jsou tři elementární akce, $c_{7,\text{init}}$, $c_{7,\text{test}}$, $c_{7,\text{inc}}$.

Pak délka výpočtu je

$$T(n) = c_{7,\text{init}} + \sum_{i=2}^{n} \left(c_{7,\text{test}} + c_9 + \sum_{j=\xi}^{i-1} (c_{10} + c_{12} + c_{13}) \right.$$
$$\left. + c_{10} + c_{15} + c_{7,\text{inc}} \right) + c_{7,\text{test}}$$

kde ξ je hodnota, při které se vnitřní cyklus algoritmu zopakuje nejvícekrát, tj. nejmenší možná hodnota `j`, při níž je ještě splněna podmínka za while (na 10. řádku algoritmu).

Takové minimální možné ξ je zřejmě rovno 1, a to v každém průchodu vnějším cyklem for. Situace, kdy v každém průchodu vnějším cyklem je $\xi = 1$, nastane, když vstupní posloupnost A je klesající.

Po dosazení $\xi = 1$ a po úpravě dostáváme

$$
\begin{aligned}
T(n) = \frac{c_{10} + c_{12} + c_{13}}{2} n^2 \\
&+ \left(c_{7,\text{test}} + c_{7,\text{inc}} + c_9 + \frac{c_{10}}{2} - \frac{c_{12}}{2} - \frac{c_{13}}{2} + c_{15}\right)n \\
&+ \left(c_{7,\text{init}} - c_{7,\text{inc}} - c_9 - c_{10} - c_{15}\right)
\end{aligned}
$$

což je kvadratický polynom v proměnné n.

Podle dřívější úmluvy lze všechny konstanty považovat za jedničky (resp. $c_9 = 2$), takže po dosazení lze pracovat s polynomem $\dfrac{3}{2}n^2 + \dfrac{9}{2}n - 4$.

Abychom mohli při porovnávání složitostí algoritmů abstrahovat od rychlosti konkrétního počítače, budeme chtít srovnávat funkce podle toho, „jak rychle rostou“, přičemž za významný rozdíl v rychlosti růstu nepovažujeme například případ, kdy jedna funkce má c-krát větší hodnoty než druhá (pro nějakou kladnou konstantu c).

Rychlost růstu funkcí

Nechť $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Zavedeme množiny funkcí:

Množina funkcí rostoucích nejvýše tak rychle jako g :

$$O(g) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0.\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

Množina funkcí rostoucích aspoň tak rychle jako g :

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0.\ 0 \leq f(n) \geq c \cdot g(n)\}$$

Množina funkcí rostoucích stejně rychle jako g :

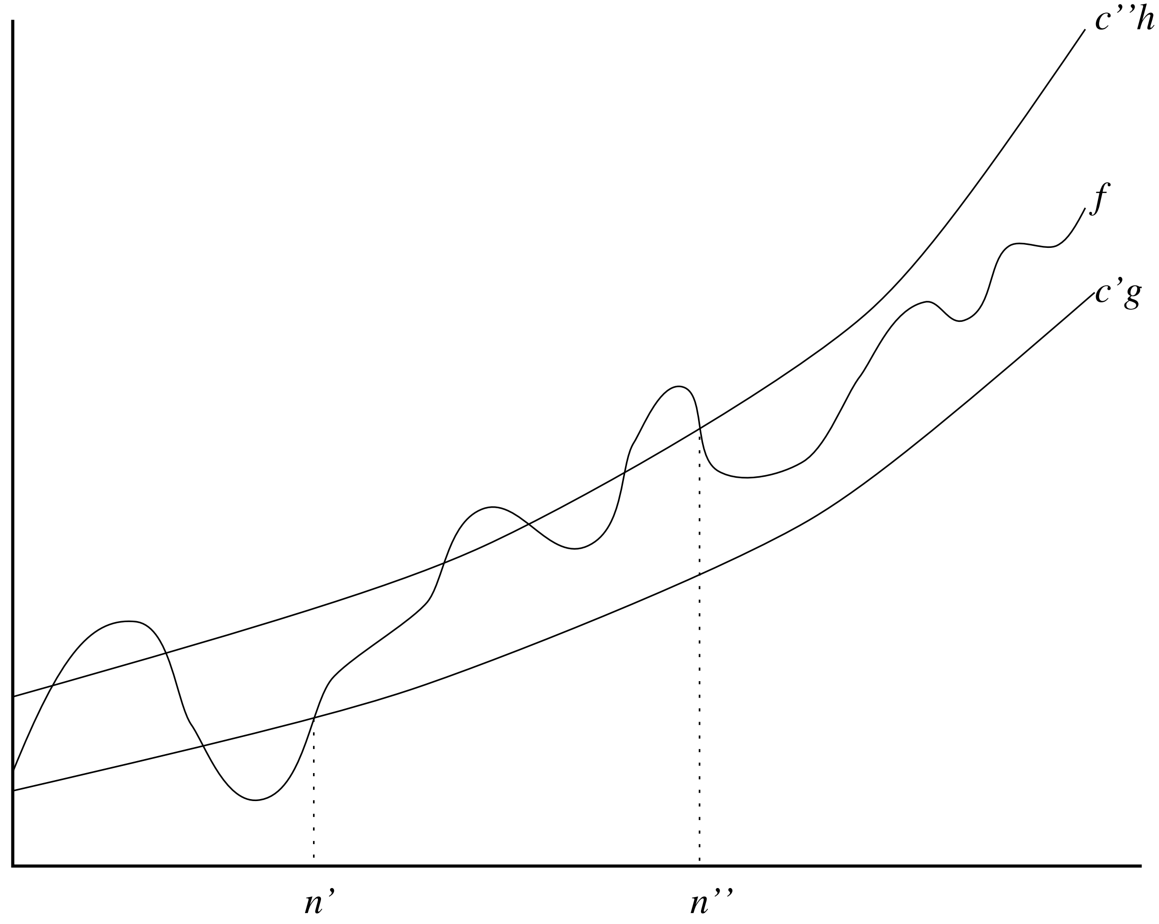
$$\Theta(g) = O(g) \cap \Omega(g)$$

Množina funkcí rostoucích pomaleji než g :

$$o(g) = \{f \mid \forall c > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0.\, 0 \leq f(n) < c \cdot g(n)\}$$

Množina funkcí rostoucích rychleji než g :

$$\omega(g) = \{f \mid \forall c > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0.\, 0 \leq c \cdot g(n) < f(n)\}$$



$$f \in \Omega(g) \Leftrightarrow \; \forall n \geq n'.\, 0 \leq c'g(n) \leq f(n)$$

$$f \in O(h) \Leftrightarrow \; \forall n \geq n''.\, f(n) \leq c''h(n)$$

Protože se budeme zabývat především funkcemi vyjadřujícími složitost algoritmu (která je vždy nezáporná), omezíme se dále na nezáporné funkce.

Vlastnosti množin O, Ω, Θ, o, ω

Věta: Jsou-li $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dvě funkce, pak $f \in \Theta(g)$ právě když

$$\exists c_1 > 0 \exists c_2 > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 .\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$$

Věta: Pro každé dvě kladné funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí:

$$f \in O(g) \;\Leftrightarrow\; g \in \Omega(f)$$

$$f \in o(g) \;\Leftrightarrow\; g \in \omega(f)$$

$$f \in \Theta(g) \;\Leftrightarrow\; g \in \Theta(f)$$

$$f \in o(g) \;\Rightarrow\; f \in O(g)$$

$$f \in \omega(g) \;\Rightarrow\; f \in \Omega(g)$$

V důkazu prvních dvou tvrzení stačí obrátit nerovnost a uvážit kladnou konstantu $\frac{1}{c}$.

Třetí tvrzení je triviální.

Čtvrté tvrzení říká, že jistá vlastnost platí pro všechna kladná c. Ale kladná čísla existují, například $c = 1$. Tedy platí také slabší vlastnost pro *nějaké* $c > 0$.

Důkaz pátého tvrzení je analogický.

Věta: Pro každé dvě kladné funkce $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ platí:

$$f \in o(g) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$f \in \omega(g) \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

Rovnost $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ je ekvivalentní s podmínkou $\forall c > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 . \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < c$. Obě funkce jsou kladné, tedy absolutní hodnotu nemusíme uvažovat a nerovnost lze vynásobit číslem $g(n)$, čímž dostaneme podmínku pro $f \in o(g)$. Úprava byla ekvivalentní, takže ekvivalentní jsou i obě podmínky v prvním tvrzení.

Rovnost $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ je ekvivalentní s podmínkou $\forall c > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 . \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| > c$. Obě funkce jsou kladné, tedy absolutní hodnotu nemusíme uvažovat a nerovnost lze vynásobit číslem $g(n)$, čímž dostaneme podmínku pro $f \in \omega(g)$. Úprava byla ekvivalentní, takže ekvivalentní jsou i obě podmínky v prvním tvrzení.

Jsou-li $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dvě kladné funkce, pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \;\Rightarrow\; f \in O(g)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \;\Rightarrow\; f \in \Omega(g)$$

Obrácené implikace však obecně neplatí, protože uvedené limity nemusí existovat.

Pro funkce f, g však platí silnější tvrzení:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \;\Leftrightarrow\; f \in O(g)$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \;\Leftrightarrow\; f \in \Omega(g)$$

Cvičení: Rozhodněte a zdůvodněte, zda pro každou kladnou funkci g platí $O(g) = o(g) \cup \Theta(g),\ \Omega(g) = \omega(g) \cup \Theta(g)$.

Věta: Nechť $f, g, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou tři kladné funkce a nechť funkce $q : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definována $q(n) = f(n) + g(n)$.

Pak platí:

$$f \in O(h) \wedge g \in O(h) \;\Rightarrow\; q \in O(h)$$

$$f \in \Omega(h) \wedge g \in \Omega(h) \;\Rightarrow\; q \in \Omega(h)$$

$$f \in \Theta(h) \wedge g \in \Theta(h) \;\Rightarrow\; q \in \Theta(h)$$

$$f \in o(h) \wedge g \in o(h) \;\Rightarrow\; q \in o(h)$$

$$f \in \omega(h) \wedge g \in \omega(h) \;\Rightarrow\; q \in \omega(h)$$

Poznámka: Platí řada podobných odvozených vlastností, například

$$
\begin{aligned}
f \in \Omega(h) \wedge g \in O(h) &\;\Rightarrow\; q \in \Omega(h) \\
f \in \Theta(h) \wedge g \in O(h) &\;\Rightarrow\; q \in \Theta(h) \\
f \in \Theta(h) \wedge g \in o(h) &\;\Rightarrow\; q \in \Theta(h)
\end{aligned}
$$

apod.

Cvičení: Formulujte a dokažte další vlastnosti, které z věty vyplývají.

Věta: Nechť $f, h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou dvě kladné funkce, c, d konstanty, $c > 0$, a nechť funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definována $p(n) = c \cdot f(n) + d$.

Pak platí:

$$f \in O(h) \;\Rightarrow\; p \in O(h)$$

$$f \in \Omega(h) \;\Rightarrow\; p \in \Omega(h)$$

$$f \in \Theta(h) \;\Rightarrow\; p \in \Theta(h)$$

$$f \in o(h) \;\Rightarrow\; p \in o(h)$$

$$f \in \omega(h) \;\Rightarrow\; p \in \omega(h)$$

Důkaz: Nejprve nechť $d = 0$; tvrzení obdržíme vhodnou volbou kladné konstanty v definicích tříd O, Ω, Θ, o, ω. Pro obecné $d \neq 0$ jde o speciální případ předchozí věty, kdy funkce g z jejích předpokladů je konstantní.

Věta: Nechť $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ jsou tři funkce, pak

$$f \in O(g) \wedge g \in O(h) \;\Rightarrow\; f \in O(h)$$

$$f \in o(g) \wedge g \in O(h) \;\Rightarrow\; f \in o(h)$$

$$f \in O(g) \wedge g \in o(h) \;\Rightarrow\; f \in o(h)$$

$$f \in \Omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \;\Rightarrow\; f \in \Omega(h)$$

$$f \in \omega(g) \wedge g \in \Omega(h) \;\Rightarrow\; f \in \omega(h)$$

$$f \in \Omega(g) \wedge g \in \omega(h) \;\Rightarrow\; f \in \omega(h)$$

Důsledek: Relace *„růst nejvýše tak rychle“* tvoří *předuspořádání* na množině všech funkcí $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Poznámka: Relace *„růst právě tak rychle“* tvoří *ekvivalenci* na množině všech funkcí $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Tyto relace však nejsou úplné. Existují dvojice funkcí, které nejsou porovnatelné.

Poznámka: *Předuspořádání* (též *polouspořádání*) je binární relace, která je reflexivní a transitivní. *Uspořádání* je binární relace, která je reflexivní, antisymetrická a transitivní. *Ekvivalence* je binární relace, která je reflexivní, symetrická a transitivní.

Cvičení: Najděte příklad dvojice funkcí $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které nejsou porovnatelné, tj. $f \notin O(g), f \notin \Omega(g)$.

Cvičení: Dokažte tvrzení:
Je-li kladná funkce f skoro všude majorizována funkcí g (tj. $f(n) \leq g(n)$ pro skoro všechna n), pak $f \in O(g)$.

Cvičení: Dokažte tvrzení:
Pro každou kladnou funkci g je $o(g) \cap \omega(g) = \emptyset$.

Růst jednoduchých funkcí

Def: *Kladný polynom* je polynom s kladným vedoucím koeficientem.

Věta: Kladný polynom vyššího stupně roste vždy rychleji než polynom nižšího stupně. Dva kladné polynomy stejného stupně rostou stejně rychle.

Poznámka: Předchozí větu lze zobecnit i na mocninné funkce s neceločíselnými exponenty: jestliže $0 \leq a < b$, pak $n^a \in o(n^b)$.

Věta: Exponenciální funkce se základem $a > 1$ roste rychleji než libovolný polynom. Logaritmické funkce rostou pomaleji než funkce lineární.

Cvičení: Dokažte, že pro každé přirozené číslo k platí $(n+1)^k \in O(n^k)$.
(Vhodnou kladnou konstantu c z definice množiny O určete podle binomické věty.)

Věta: Nechť $1 < a < b$. Pak

$$\text{log}_a \in \Theta(\text{log}_b)$$
$$a^n \in o(b^n)$$

Poznámka: Roste-li funkce logaritmicky, pak na základu logaritmu nezáleží. (Jen musí být větší než 1, což je však nutná podmínka k tomu, aby funkce vůbec rostla.)

Věta: Platí $n! \in O(n^n), n! \in \Omega(2^n)$.

Důkaz plyne z definice faktoriálu.

Poznámka: Místo „$\Theta(\log)$“ se často píše „$\Theta(\log n)$“, podobně jako „$o(n^2)$“ místo „$o(f)$, kde $f(n) = n^2$ pro každé n“,
a dokonce „$O(1)$“ místo „$O(g)$, kde $g(n) = c > 0$“.
Mnozí autoři zacházejí ve zneužívání notace ještě dále (např. pracují s množinami funkcí, jako by to byla čísla).

Poznámka: Z tzv. Stirlingovy aproximace

$$\sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n \leq n! \leq \sqrt{2\pi n}(n/\mathrm{e})^n \mathrm{e}^{1/(12n)}$$

vyplývají silnější tvrzení o růstu faktoriálu:

$$n! \in o(n^n), \qquad n! \in \omega(2^n)$$

Def: Řekneme, že funkce f *roste nejvýše polylogaritmicky*, když existuje číslo $k > 0$ tak, že $f \in O\left((\log n)^k\right)$.

Def: Řekneme, že funkce f *roste nejvýše polynomiálně*, když existuje číslo $k > 0$ tak, že $f \in O(n^k)$.

Funkce f roste *roste aspoň polynomiálně*, když existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že $f \in \Omega(n^\varepsilon)$.

Def: Řekneme, že funkce f *roste nejvýše exponenciálně*, když existuje číslo $a > 1$ tak, že $f \in O(a^n)$.

Funkce f *roste aspoň exponenciálně*, když existuje číslo $a > 1$ tak, že $f \in \Omega(a^n)$.

Def: Řekneme, že funkce f *roste aspoň dvojitě exponenciálně*, když existuje číslo $a > 1$ tak, že $f \in \Omega\left(a^{a^n}\right)$.

Poznámka: Existují funkce, které rostou rychleji než všechny k-násobně exponenciální funkce, a to dokonce pro libovolné k.
Naopak existují kladné funkce, které rostou (tedy rychleji než konstantní), ale rostou pomaleji než funkce $\log \circ \cdots \circ \log$, kde logaritmus můžeme složit sama se sebou libovolněkrát.

Def: *Fibonacciho funkce* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je definovaná rekursivně:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ F(1) &= 1 \\ F(n+2) &= F(n) + F(n+1) \end{aligned}$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Věta: Nechť $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\hat{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Pak pro každé n platí $F(n) = \dfrac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$.

Důsledek: Pro Fibonacciho funkci F platí $F \in \Theta(\varphi^n)$, kde $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Důkaz Věty – indukcí podle n.

(i) Pro $n = 0$ a $n = 1$ tvrzení platí:

$$F(0) = \frac{\varphi^0 - \hat{\varphi}^0}{\sqrt{5}} = \frac{1-1}{\sqrt{5}} = 0, \quad F(1) = \frac{\varphi^1 - \hat{\varphi}^1}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = 1$$

(ii) Předpokládejme, že pro nějaké $n \geq 0$ platí $F(n) = \dfrac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}}$,

$F(n+1) = \dfrac{\varphi^{n+1} - \hat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}$, a ukážeme, že $F(n+2) = \dfrac{\varphi^{n+2} - \hat{\varphi}^{n+2}}{\sqrt{5}}$.

$$F(n+2) = F(n) + F(n+1) = \frac{\varphi^n - \hat{\varphi}^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi^{n+1} - \hat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{4\left(1+\sqrt{5}\right)^n - 4\left(1-\sqrt{5}\right)^n + 2\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1} - 2\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+2}\sqrt{5}} =$$

$$\frac{\left(4+2(1+\sqrt{5})\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n}-\left(4+2(1-\sqrt{5})\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n}}{2^{n+2}\sqrt{5}}=$$

$$\frac{\left(1+2\sqrt{5}+5\right)\left(1+\sqrt{5}\right)^{n}-\left(1-2\sqrt{5}+5\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^{n}}{2^{n+2}\sqrt{5}}=$$

$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+2}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+2}}{2^{n+2}\sqrt{5}}=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}=\frac{\varphi^{n+2}-\hat{\varphi}^{n+2}}{\sqrt{5}}$$

Lemma: Funkce $\log(n!)$ roste stejně rychle jako funkce $n \cdot \log n$.

Důkaz: Nejdříve ukážeme, že $\log_2 n! \in O(n \log n)$.

$\log_2 n! = \sum_{k=1}^{n} \log_2 k \leq \sum_{k=1}^{n} \log_2 n = n \log n$, takže $\log_2 n! \in O(n \log n)$.

Dále funkci $\log_2 n!$ ohraničíme i zdola: $2 \log_2 n! = 2 \sum_{k=1}^{n} \log_2 k \geq 2 \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} \log_2 k \geq$

$2 \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor}^{n} \log_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \log_2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \in \Theta(n \log n)$, takže $\log_2 n! \in \Omega(n \log n)$.

Dohromady $\log n! \in \Theta(n \log n)$.

Cvičení: Dokažte, že délky výpočtů podle nějakého algoritmu A jsou v množině $\Theta(g)$, právě když časová složitost algoritmu A je v $O(g)$ a délky nejkratších výpočtů patří do $\Omega(g)$.

Cvičení: Seřaďte podle rychlosti růstu funkce (v proměnné n): $\log n^n$, $\log(\log n)$, $n\sqrt{n}$, $2^{\log_3 n}$.