Rezoluce a logické programování (pokračování)

Logický program

- **Programová klauzule**: právě jeden pozitivní literál (fakt nebo pravidlo)
- **Logický program**: konečná množina programových klauzulí
- Příklad:
  - logický program jako množina klauzulí:

    $P = \{P_1, P_2, P_3\}$

    $P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$

Logický program

- **Programová klauzule**: právě jeden pozitivní literál (fakt nebo pravidlo)
- **Logický program**: konečná množina programových klauzulí
- Příklad:
  - logický program jako množina klauzulí:

    $P = \{P_1, P_2, P_3\}$

    $P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
  - logický program v prologovské notaci:

    $p.$

    $p :- q.$

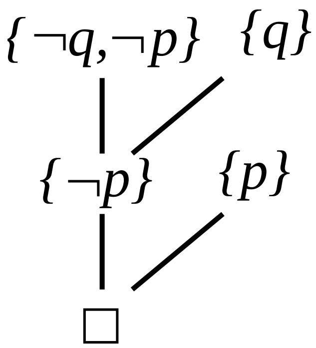
    $q.$
  - cílová klauzule: $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\qquad :- q, p.$

Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí P
- $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\quad$ $P = \{P_1, P_2, P_3\}:$ $\quad P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
- $: -q, p.$ $\quad$ $p.$ $\quad$ $p : -q,$ $\quad$ $q.$

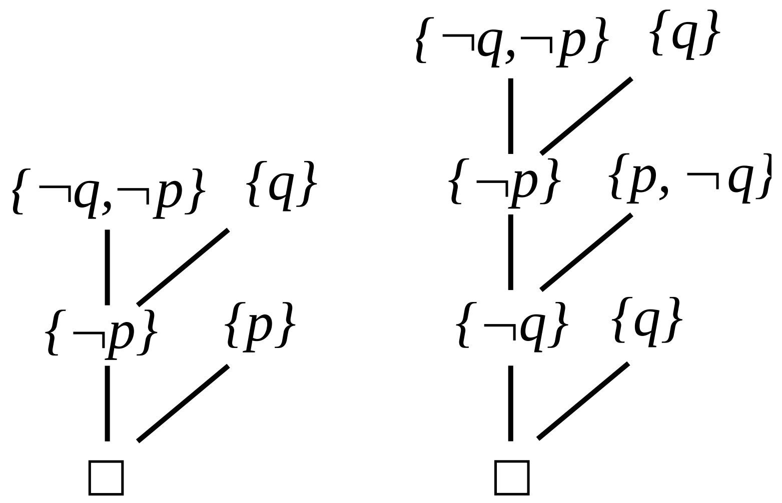
Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí P
- $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\quad$ $P = \{P_1, P_2, P_3\}:$ $\quad$ $P_1 = \{p\},$ $\quad$ $P_2 = \{p, \neg q\},$ $\quad$ $P_3 = \{q\}$
- $:-q, p.$ $\quad$ $p.$ $\quad$ $p :- q,$ $\quad$ $q.$



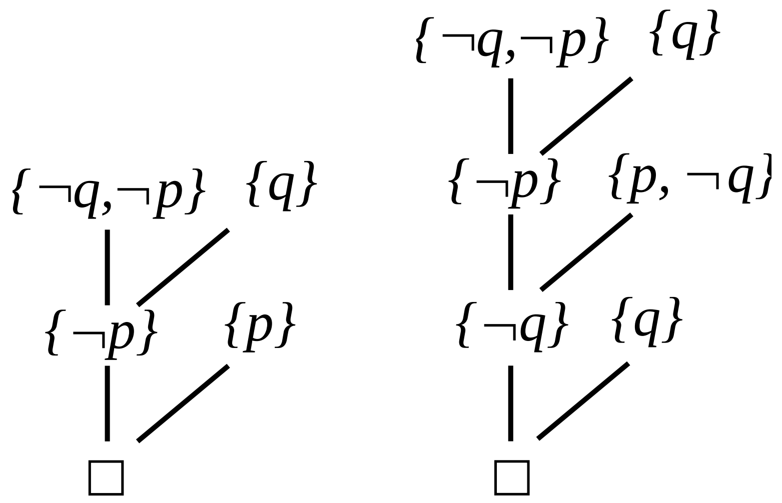
Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí P
- $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\quad P = \{P_1, P_2, P_3\}:$ $\quad P_1 = \{p\},$ $\quad P_2 = \{p, \neg q\},$ $\quad P_3 = \{q\}$
- $:- q, p.$ $\quad p.$ $\quad p :- q,$ $\quad q.$



Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí P
- $G = \{\neg q, \neg p\}$ $\quad P = \{P_1, P_2, P_3\}$: $\quad P_1 = \{p\}$, $\quad P_2 = \{p, \neg q\}$, $\quad P_3 = \{q\}$
- $:-q, p.$ $\quad p.$ $\quad p :- q,$ $\quad q.$



- **Střední klauzule jsou cílové klauzule**

Lineární vstupní rezoluce

- **Vstupní rezoluce na $P \cup \{G\}$**
  - (opakování:) alespoň jedna z klauzulí použitá při rezoluci je z výchozí vstupní množiny
  - začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
  - boční klauzule jsou vždy z P (tj. jsou to programové klauzule)

Lineární vstupní rezoluce

- **Vstupní rezoluce na $P \cup \{G\}$**
  - (opakování:) alespoň jedna z klauzulí použitá při rezoluci je z výchozí vstupní množiny
  - začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
  - boční klauzule jsou vždy z P (tj. jsou to programové klauzule)
- (Opakování:) **Lineární rezoluční důkaz C z S** je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0 \rangle, \ldots \langle C_n, B_n \rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - C_0 a každá B_i jsou prvky S **nebo některé $C_j, j < i$**
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i

Lineární vstupní rezoluce

- **Vstupní rezoluce na $P \cup \{G\}$**
  - (opakování:) alespoň jedna z klauzulí použitá při rezoluci je z výchozí vstupní množiny
  - začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
  - boční klauzule jsou vždy z P (tj. jsou to programové klauzule)
- (Opakování:) **Lineární rezoluční důkaz C z S** je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0 \rangle, \ldots \langle C_n, B_n \rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - C_0 a každá B_i jsou prvky S **nebo některé $C_j, j < i$**
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i
- **Lineární vstupní (*Linear Input*) rezoluce (LI-rezoluce)** C z $P \cup \{G\}$ posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0 \rangle, \ldots \langle C_n, B_n \rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - **$C_0 = G$ a každá B_i jsou prvky P** lineární rezoluce + vstupní rezoluce
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa C_i a B_i

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály
- **Věta:** Existuje-li rezoluční důkaz prázdné množiny z množiny S Hornových klauzulí, pak tento rezoluční strom má v listech **jedinou cílovou klauzuli**.
  - pokud začnu důkaz pravidlem a faktem, pak dostanu zase pravidlo
  - pokud začnu důkaz dvěma pravidly, pak dostanu zase pravidlo
  - na dvou faktech rezolvovat nelze

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- Věta: Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály

- Věta: Existuje-li rezoluční důkaz prázdné množiny z množiny S Hornových klauzulí, pak tento rezoluční strom má v listech **jedinou cílovou klauzuli**.
  - pokud začnu důkaz pravidlem a faktem, pak dostanu zase pravidlo
  - pokud začnu důkaz dvěma pravidly, pak dostanu zase pravidlo
  - na dvou faktech rezolvovat nelze

  $\Rightarrow$ dokud nepoužiji cíl pracuji stále s množinou faktů a pravidel

Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li S nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak S obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály

- **Věta:** Existuje-li rezoluční důkaz prázdné množiny z množiny S Hornových klauzulí, pak tento rezoluční strom má v listech **jedinou cílovou klauzuli**.
  - pokud začnu důkaz pravidlem a faktem, pak dostanu zase pravidlo
  - pokud začnu důkaz dvěma pravidly, pak dostanu zase pravidlo
  - na dvou faktech rezolvovat nelze

  $\Rightarrow$ dokud nepoužiji cíl pracuji stále s množinou faktů a pravidel
  - pokud použiji v důkazu cílovou klauzulí,
    fakta mi ubírají negat.literály, pravidla mi je přidávají,
    v rezolventě mám stále samé negativní literály, tj. nelze rezolvovat s dalším cílem

Korektnost a úplnost

- **Věta:** Množina S Hornových klauzulí je nesplnitelná, právě když existuje rezoluční vyvrácení S pomocí **vstupní rezoluce**.
- **Korektnost** platí stejně jako pro ostatní omezení rezoluce
- **Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:

  Nechť P je množina programových klauzulí a G cílová klauzule.

  Je-li množina $P \cup \{G\}$ Hornových klauzulí nesplnitelná,

  pak existuje rezoluční vyvrácení $P \cup \{G\}$ pomocí LI-rezoluce.

  - vstupní rezoluce pro (obecnou) formuli sama o sobě není úplná

    $\Longrightarrow$ LI-rezoluce aplikovaná na (obecnou) formuli nezaručuje,

    že nalezeneme důkaz, i když formule platí!

Korektnost a úplnost

- **Věta:** Množina S Hornových klauzulí je nesplnitelná, právě když existuje rezoluční vyvrácení S pomocí **vstupní rezoluce**.
- **Korektnost** platí stejně jako pro ostatní omezení rezoluce
- **Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  Nechť P je množina programových klauzulí a G cílová klauzule.
  Je-li množina $P \cup \{G\}$ Hornových klauzulí nesplnitelná,
  pak existuje rezoluční vyvrácení $P \cup \{G\}$ pomocí LI-rezoluce.
  - vstupní rezoluce pro (obecnou) formuli sama o sobě není úplná

    $\Longrightarrow$ LI-rezoluce aplikovaná na (obecnou) formuli nezaručuje,
    že nalezeneme důkaz, i když formule platí!
- **Význam LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  - $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $G = \{G_1, \ldots, G_m\}$
  - LI-rezolucí ukážeme nesplnitelnost $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge (\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$

Korektnost a úplnost

- **Věta:** Množina S Hornových klauzulí je nesplnitelná, právě když existuje rezoluční vyvrácení S pomocí **vstupní rezoluce**.
- **Korektnost** platí stejně jako pro ostatní omezení rezoluce
- **Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  Nechť P je množina programových klauzulí a G cílová klauzule.
  Je-li množina $P \cup \{G\}$ Hornových klauzulí nesplnitelná,
  pak existuje rezoluční vyvrácení $P \cup \{G\}$ pomocí LI-rezoluce.
  - vstupní rezoluce pro (obecnou) formuli sama o sobě není úplná

    $\Longrightarrow$ LI-rezoluce aplikovaná na (obecnou) formuli nezaručuje,

    že nalezeneme důkaz, i když formule platí!
- **Význam LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  - $P = \{P_1, \ldots, P_n\}$, $G = \{G_1, \ldots, G_m\}$
  - LI-rezolucí ukážeme nesplnitelnost $P_1 \wedge \cdots \wedge P_n \wedge (\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$
  - pokud tedy předpokládáme, že program $\{P_1, \ldots, P_n\}$ platí,
    tak musí být nepravdivá $(\neg G_1 \vee \cdots \vee \neg G_m)$, tj. musí platit $G_1 \wedge \cdots \wedge G_m$

Uspořádané klauzule (*definite clauses*)

- Klauzule = množina literálů
- **Uspořádáná klauzule (*definite clause*)** = **posloupnost literálů**
  - nelze volně měnit pořadí literálů
- **Rezoluční princip pro uspořádané klauzule**:

$$\frac{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \ldots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma}$$

  - **uspořádaná rezolventa**: $\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma$
  - ρ je přejmenování proměnných takové, že klauzule $\{A_0, \ldots, A_n\}$ a $\{B, B_0, \ldots, B_m\}\rho$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor pro A_i a $B\rho$

Uspořádané klauzule (*definite clauses*)

- Klauzule = množina literálů
- **Uspořádáná klauzule (*definite clause*)** = **posloupnost literálů**
  - nelze volně měnit pořadí literálů
- **Rezoluční princip pro uspořádané klauzule**:

$$\frac{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \ldots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma}$$

  - **uspořádaná rezolventa**: $\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma$
  - ρ je přejmenování proměnných takové, že klauzule $\{A_0, \ldots, A_n\}$ a $\{B, B_0, \ldots, B_m\}\rho$ nemají společné proměnné
  - σ je nejobecnější unifikátor pro A_i a $B\rho$
  - **rezoluce je realizována na literálech $\neg A_i\sigma$ a $B\rho\sigma$**
  - je dodržováno pořadí literálů, tj.
    $\{\neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho\}\sigma$ **jde do uspořádané rezolventy přesně na pozici $\neg A_i\sigma$**

Uspořádané klauzule II.

- Uspořádáné klauzule

$$\frac{\{\neg A_0,\ldots,\neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \ldots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0,\ldots,\neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1},\ldots,\neg A_n\}\sigma}$$

Hornovy klauzule

$$\frac{: -A_0,\ldots,A_n. \qquad B : -B_0, \ldots, B_m.}{: -(A_0,\ldots,A_{i-1}, B_0\rho, \ldots, B_m\rho, A_{i+1},\ldots,A_n)\sigma.}$$

Uspořádané klauzule II.

- Uspořádáné klauzule

$$\frac{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \ldots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \ldots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \ldots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \ldots, \neg A_n\}\sigma}$$

Hornovy klauzule

$$\frac{:- A_0, \ldots, A_n. \qquad B :- B_0, \ldots, B_m.}{:- (A_0, \ldots, A_{i-1}, B_0\rho, \ldots, B_m\rho, A_{i+1}, \ldots, A_n)\sigma.}$$

- Příklad:

$$\frac{\{\neg s(X), \neg t(1), \neg u(X)\} \qquad \{t(Z), \neg q(Z,X), \neg r(3)\}}{\{\neg s(X), \neg q(1,A), \neg r(3), \neg u(X)\}}$$

$$\frac{:- s(X), t(1), u(X). \qquad t(Z) :- q(Z,X), r(3).}{:- s(X), q(1,A), r(3), u(X).}$$

$$\rho = [X/A] \qquad \sigma = [Z/1]$$

LD-rezoluce

- **LD-rezoluční vyvrácení** množiny uspořádaných klauzulí $P \cup \{G\}$ je posloupnost $\langle G_0, C_0 \rangle, \ldots, \langle G_n, C_n \rangle$ taková, že
  - G_i, C_i jsou uspořádané klauzule
  - $G = G_0$
  - $G_{n+1} = \square$
  - G_i je uspořádaná cílová klauzule
  - C_i je přejmenování klauzule z P
    - C_i neobsahuje proměnné, které jsou v $G_j, j \leq i$ nebo v $C_k, k \leq i$
  - $G_{i+1}, 0 \leq i \leq n$ je uspořádaná rezolventa G_i a C_i

LD-rezoluce

- **LD-rezoluční vyvrácení** množiny uspořádaných klauzulí $P \cup \{G\}$ je posloupnost $\langle G_0, C_0 \rangle, \ldots, \langle G_n, C_n \rangle$ taková, že
  - G_i, C_i jsou uspořádané klauzule
  - $G = G_0$
  - $G_{n+1} = \square$
  - G_i je uspořádaná cílová klauzule
  - C_i je přejmenování klauzule z P
    - C_i neobsahuje proměnné, které jsou v $G_j, j \le i$ nebo v $C_k, k \le i$
  - $G_{i+1}, 0 \le i \le n$ je uspořádaná rezolventa G_i a C_i
- LD-rezoluce: korektní a úplná

SLD-rezoluce

- **Lineární rezoluce se selekčním pravidlem = SLD-rezoluce (*Selected Linear resolution for Definite clauses*)**
  - rezoluce
  - **Selekční** pravidlo
  - **Lineární** rezoluce
  - ***Definite*** (uspořádané) klauzule
  - vstupní rezoluce

SLD-rezoluce

- **Lineární rezoluce se selekčním pravidlem = SLD-rezoluce (*Selected Linear resolution for Definite clauses*)**
  - rezoluce
  - **Selekční** pravidlo
  - **Lineární** rezoluce
  - ***Definite*** (uspořádané) klauzule
  - vstupní rezoluce
- **Selekční pravidlo** R je funkce, která každé neprázdné klauzuli C přiřazuje nějaký z jejích literálů $R(C) \in C$
  - při rezoluci vybírám s klauzule literál určený selekčním pravidlem

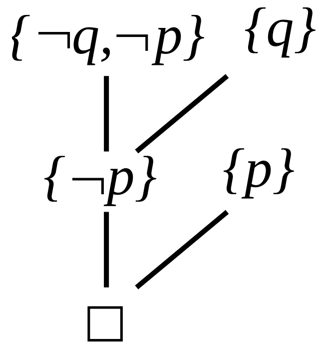
SLD-rezoluce

- **Lineární rezoluce se selekčním pravidlem = SLD-rezoluce (*Selected Linear resolution for Definite clauses*)**
  - rezoluce
  - **Selekční** pravidlo
  - **Lineární** rezoluce
  - ***Definite*** (uspořádané) klauzule
  - vstupní rezoluce
- **Selekční pravidlo** R je funkce, která každé neprázdné klauzuli C přiřazuje nějaký z jejích literálů $R(C) \in C$
  - při rezoluci vybírám s klauzule literál určený selekčním pravidlem
- Pokud se R neuvádí, pak se předpokládá výběr **nejlevějšího literálu**
  - nejlevější literál vybírá i Prolog

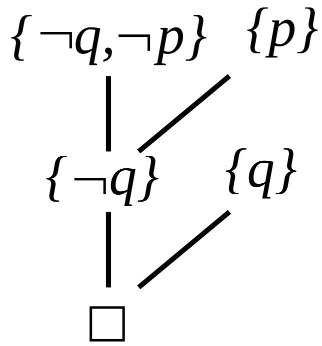
Lineární rezoluce se selekčním pravidlem

- $P = \{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}, \quad G = \{\neg q, \neg p\}$

výběr
nejlevějšího
literálu

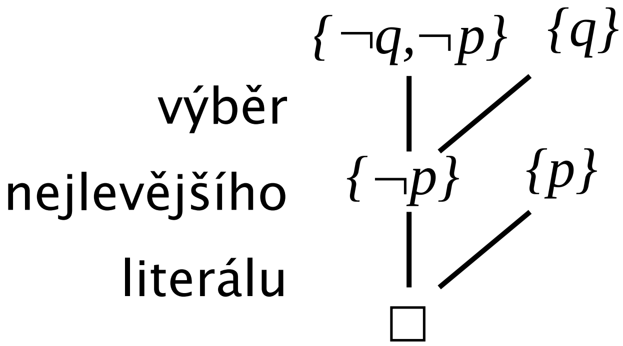


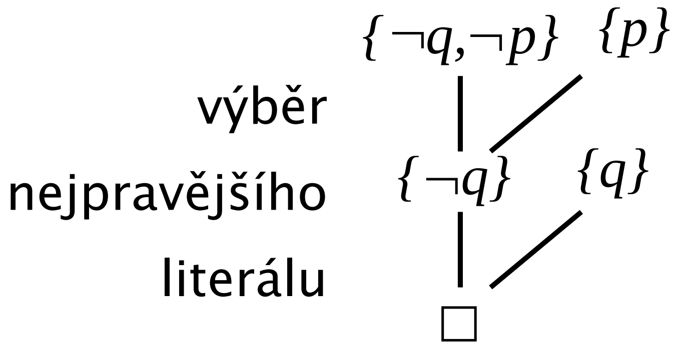
výběr
nejpravějšího
literálu



Lineární rezoluce se selekčním pravidlem

- $P = \{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}, \quad G = \{\neg q, \neg p\}$





- **SLD-rezoluční vyvrácení** $P \cup \{G\}$ pomocí selekčního pravidla R je LD-rezoluční vyvrácení $\langle G_0, C_0 \rangle, \ldots, \langle G_n, C_n \rangle$ takové, že $G = G_0, G_{n+1} = \square$ a $R(G_i)$ je literál rezolvovaný v kroku i

Lineární rezoluce se selekčním pravidlem

- $P = \{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}, \quad G = \{\neg q, \neg p\}$

výběr nejlevějšího literálu:

$$\{\neg q, \neg p\} \quad \{q\}$$
$$\{\neg p\} \quad \{p\}$$
$$\square$$

výběr nejpravějšího literálu:

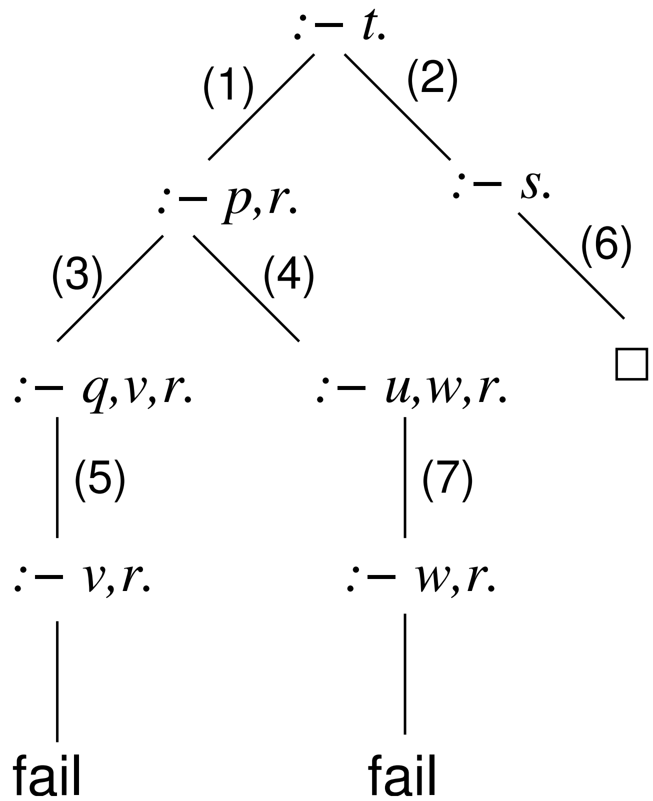
$$\{\neg q, \neg p\} \quad \{p\}$$
$$\{\neg q\} \quad \{q\}$$
$$\square$$

- **SLD-rezoluční vyvrácení** $P \cup \{G\}$ pomocí selekčního pravidla R je LD-rezoluční vyvrácení $\langle G_0, C_0\rangle, \ldots, \langle G_n, C_n\rangle$ takové, že $G = G_0, G_{n+1} = \square$ a $R(G_i)$ je literál rezolvovaný v kroku i
- SLD-rezoluce – korektní, úplná
- Efektivita SLD-rezoluce je závislá na
  - selekčním pravidle R
  - způsobu výběru příslušné programové klauzule pro tvorbu rezolventy
    - v Prologu se vybírá vždy klauzule, která je v programu první

Příklad: SLD-strom

$t :- p, r.$	(1)
$t :- s.$	(2)
$p :- q, v.$	(3)
$p :- u, w.$	(4)
$q.$	(5)
$s.$	(6)
$u.$	(7)

$:- t.$



Strom výpočtu (SLD-strom)

- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu P vzhledem k cíli G

Strom výpočtu (SLD-strom)

- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu P vzhledem k cíli G
- kořeny stromy jsou programové klauzule a cílová klauzule G
- v uzlech jsou rezolventy
- výchozím kořenem rezoluce je cílová klauzule G

Strom výpočtu (SLD-strom)

- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu P vzhledem k cíli G
- kořeny stromy jsou programové klauzule a cílová klauzule G
- v uzlech jsou rezolventy
- výchozím kořenem rezoluce je cílová klauzule G
- listy jsou dvojího druhu:
  - označené prázdnou klauzulí – jedná se o **úspěšné uzly** (*succes nodes*)
  - označené neprázdnou klauzulí – jedná se o **neúspěšné uzly** (*failure nodes*)

Strom výpočtu (SLD-strom)

- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu P vzhledem k cíli G
- kořeny stromy jsou programové klauzule a cílová klauzule G
- v uzlech jsou rezolventy
- výchozím kořenem rezoluce je cílová klauzule G
- listy jsou dvojího druhu:
  - označené prázdnou klauzulí – jedná se o **úspěšné uzly** (*succes nodes*)
  - označené neprázdnou klauzulí – jedná se o **neúspěšné uzly** (*failure nodes*)
- úplnost SLD-rezoluce zaručuje **existenci** cesty od kořene k úspěšnému uzlu pro každý možný výsledek příslušející cíli G

Příklad: SLD-strom a výsledná substituce

$:-a(Z).$

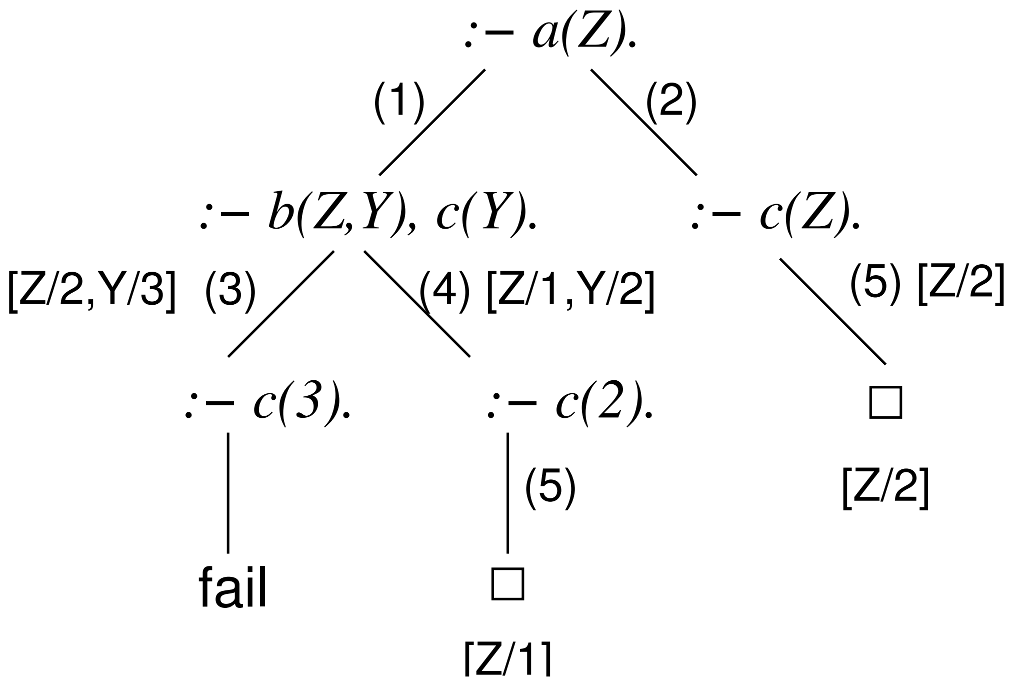
$a(X):-b(X,Y),c(Y).$ (1)

$a(X):-c(X).$ (2)

$b(2,3).$ (3)

$b(1,2).$ (4)

$c(2).$ (5)



Příklad: SLD-strom a výsledná substituce

$:-a(Z).$

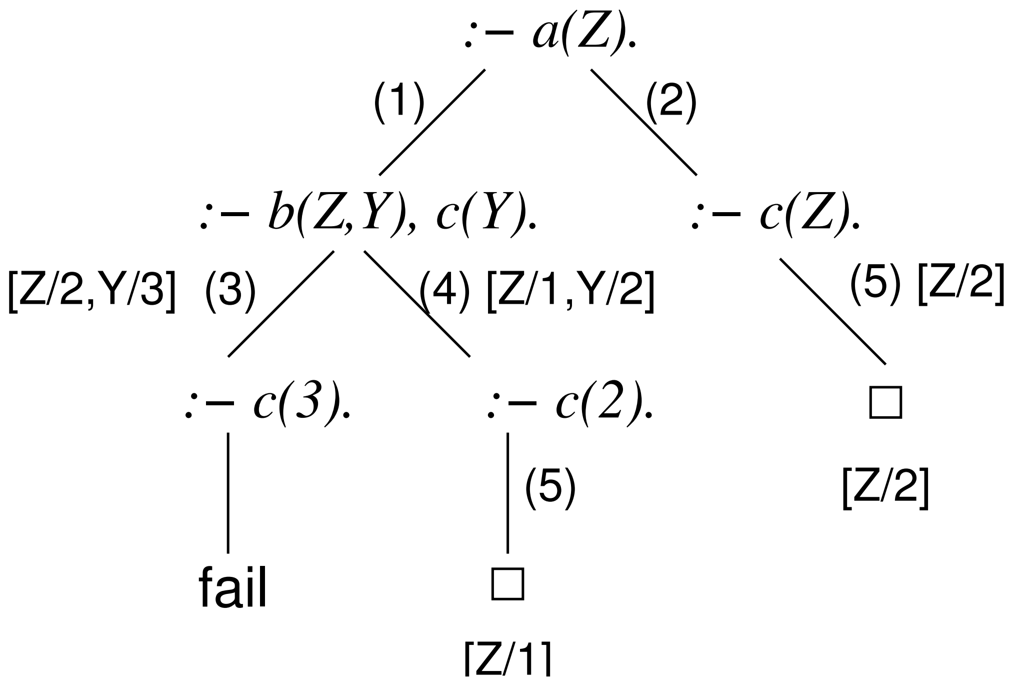
$a(X):-b(X,Y),c(Y).$ (1)

$a(X):-c(X).$ (2)

$b(2,3).$ (3)

$b(1,2).$ (4)

$c(2).$ (5)



Cvičení:

$p(B):-q(A,B),r(B).$

$p(A):-q(A,A).$

$q(a,a).$

$q(a,b).$

$r(b).$

ve výsledné substituci jsou pouze proměnné z dotazu, tj.

výsledné substituce jsou $[Z/1]$ a $[Z/2]$

nezajímá mě substituce $[Y/2]$

Výsledná substituce (*answer substitution*)

q(a).

p(a,b).

:−q(X), p(X,Y).

X=a, Y=b

:− q(X), p(X,Y). *q(a).* *[X/a]*

:− p(a,Y). *p(a,b).* *[Y/b]*

$\square$ *[X/a,Y/b]*

Výsledná substituce (*answer substitution*)

$q(a).$
$p(a,b).$

$:- q(X), p(X,Y).$
$X=a,\ Y=b$

$:- q(X), p(X,Y).$	$q(a).$	$[X/a]$
$:- p(a,Y).$	$p(a,b).$	$[Y/b]$
$\square$		$[X/a, Y/b]$

- Každý krok SLD-rezoluce vytváří novou unifikační substituci θ_i

  $\Rightarrow$ potenciální instanciace proměnné ve vstupní cílové klauzuli

- **Výsledná substituce** (*answer substitution*)

$$\theta = \theta_0 \theta_1 \cdots \theta_n \qquad \text{složení unifikací}$$

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P proaramových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

(1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$

kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P proaramových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

  (1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$

  kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G

  nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

  (2) $P \vdash \neg G$

  (3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P proaramových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

(1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$

kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G

nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

(2) $P \vdash \neg G$

(3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

a jedná se tak o **důkaz existence vhodných objektů**, které na základě vlastností množiny P splňují konjunkci literálů v cílové klauzuli

Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina P proaramových klauzulí, cílová klauzule G
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

  (1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$

  kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v G

  nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

  (2) $P \vdash \neg G$

  (3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

  a jedná se tak o **důkaz existence vhodných objektů**, které na základě vlastností množiny P splňují konjunkci literálů v cílové klauzuli

- Důkaz nesplnitelnosti $P \cup \{G\}$ znamená **nalezení protipříkladu**

  ten pomocí SLD-stromu **konstruuje termy (odpověď)** splňující konjunkci v (3)

Výpočetní strategie

- **Korektní výpočetní strategie** prohledávání stromu výpočtu musí zaručit, že se každý (konečný) výsledek nalézt v konečném čase

Výpočetní strategie

- **Korektní výpočetní strategie** prohledávání stromu výpočtu musí zaručit, že se každý (konečný) výsledek nalézt v konečném čase
- Korektní výpočetní strategie = **prohledávání stromu do šířky**
  - exponenciální paměťová náročnost
  - složité řídící struktury

Výpočetní strategie

- **Korektní výpočetní strategie** prohledávání stromu výpočtu musí zaručit, že se každý (konečný) výsledek nalézt v konečném čase
- Korektní výpočetní strategie = **prohledávání stromu do šířky**
  - exponenciální paměťová náročnost
  - složité řídicí struktury
- Použitelná výpočetní strategie = **prohledávání stromu do hloubky**
  - jednoduché řídicí struktury (zásobník)
  - lineární paměťová náročnost
  - **není ale úplná**: nenalezne vyvrácení i když existuje
    - procházení nekonečné větve stromu výpočtu
      $\Rightarrow$ na nekonečných stromech dojde k zacyklení
    - nedostaneme se tak na jiné existující úspěšné uzly

SLD-rezoluce v Prologu: úplnost

- **Prolog**: prohledávání stromu do hloubky

  $\Rightarrow$ **neúplnost** použité výpočetní strategie

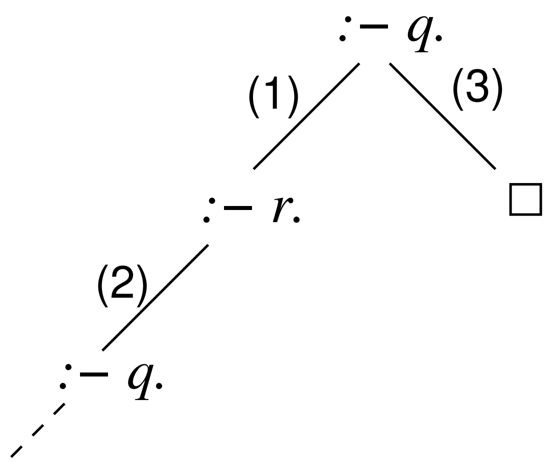
- Implementace SLD-rezoluce v Prologu
  - **není úplná**

    logický program: $q :- r.$ (1)

    $r :- q.$ (2)

    $q.$ (3)

    dotaz: $:- q.$



Test výskytu

- Kontrola, zda se proměnná vyskytuje v termu, kterým ji substituujeme
  - dotaz : $-a(B,B)$.
  - logický program: $a(X, f(X))$.
  - vede k: $[B/X]$, $[X/f(X)]$
- Unifikátor pro $g(X_1, \dots, X_n)$ a $g(f(X_0, X_0), f(X_1, X_1), \dots, f(X_{n-1}, X_{n-1}))$

$$X_1 = f(X_0, X_0), \quad X_2 = f(X_1, X_1), \dots, \quad X_n = f(X_{n-1}, X_{n-1})$$
$$X_2 = f(f(X_0, X_0), f(X_0, X_0)), \dots$$

délka termu pro X_k exponenciálně narůstá

Test výskytu

- Kontrola, zda se proměnná vyskytuje v termu, kterým ji substituujeme
  - dotaz : $-a(B,B)$.
  - logický program: $a(X, f(X))$.
  - vede k: $[B/X]$, $[X/f(X)]$
- Unifikátor pro $g(X_1, \ldots, X_n)$ a $g(f(X_0,X_0), f(X_1,X_1), \ldots, f(X_{n-1},X_{n-1}))$

  $$X_1 = f(X_0,X_0), \quad X_2 = f(X_1,X_1), \ldots, \quad X_n = f(X_{n-1},X_{n-1})$$
  $$X_2 = f(f(X_0,X_0), f(X_0,X_0)), \ldots$$

  délka termu pro X_k exponenciálně narůstá

  $\Longrightarrow$ **exponenciální složitost** na ověření kontroly výskytu
- Test výskytu se **při unifikaci v Prologu neprovádí**
- Důsledek: $? - X = f(X)$ uspěje s $X = f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(\ldots))))))))))$

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

  $\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) : -p(X, X).$ $\quad : -t(X).$

$p(X, f(X)).$ $\quad X = f(f((f(...)))))))))$ $\quad$ problém se projeví

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

  $\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X, X).$ $\quad :- t(X).$

$p(X, f(X)).$ $\quad X = f(f((f(\ldots))))))))))$ $\quad$ problém se projeví

(2) $t :- p(X, X).$ $\quad :- t.$

$p(X, f(X)).$ $\quad$ yes $\quad$ dokazovací systém nehledá unifikátor pro X a $f(X)$

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

  $\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X, X).$ $\quad :- t(X).$

$p(X, f(X)).$ $\quad X = f(f((f(...))))))))))$ $\quad$ problém se projeví

(2) $t :- p(X, X).$ $\quad :- t.$

$p(X, f(X)).$ $\quad$ yes $\quad$ dokazovací systém nehledá unifikátor pro X a $f(X)$

- Řešení: problém typu (2) převést na problém typu (1) ?

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

  $\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X, X).$ $:- t(X).$

$p(X, f(X)).$ $X = f(f((f(...)))))))))$ problém se projeví

(2) $t :- p(X, X).$ $:- t.$

$p(X, f(X)).$ yes dokazovací systém nehledá unifikátor pro X a $f(X)$

- Řešení: problém typu (2) převést na problém typu (1) ?
  - každá proměnná v hlavě klauzule se objeví i v těle, aby se vynutilo hledání unifikátoru (přidáme $X = X$ pro každou X, která se vyskytuje pouze v hlavě)

    $t :- p(X, X).$

    $p(X, f(X)) :- X = X.$

SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

  $\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X, X).$ $:- t(X).$

$p(X, f(X)).$ $X = f(f((f(...))))))))))$ problém se projeví

(2) $t :- p(X, X).$ $:- t.$

$p(X, f(X)).$ yes   dokazovací systém nehledá unifikátor pro X a $f(X)$

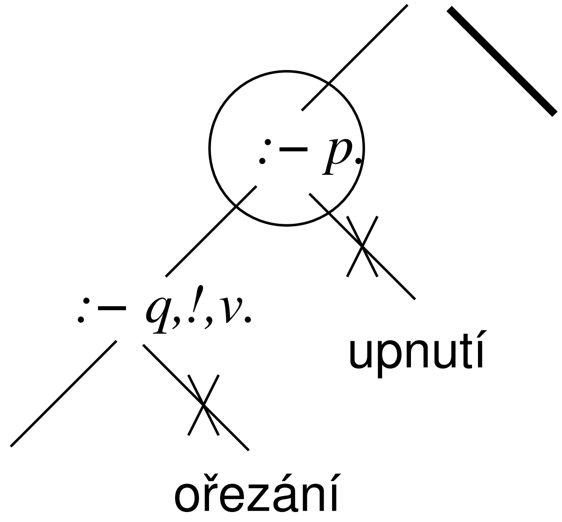
- Řešení: problém typu (2) převést na problém typu (1) ?
  - každá proměnná v hlavě klauzule se objeví i v těle, aby se vynutilo hledání unifikátoru (přidáme $X = X$ pro každou X, která se vyskytuje pouze v hlavě)

    $t :- p(X, X).$

    $p(X, f(X)) :- X = X.$
  - optimalizace v kompilátoru mohou způsobit opět odpověď „yes”

Řízení implementace: řez

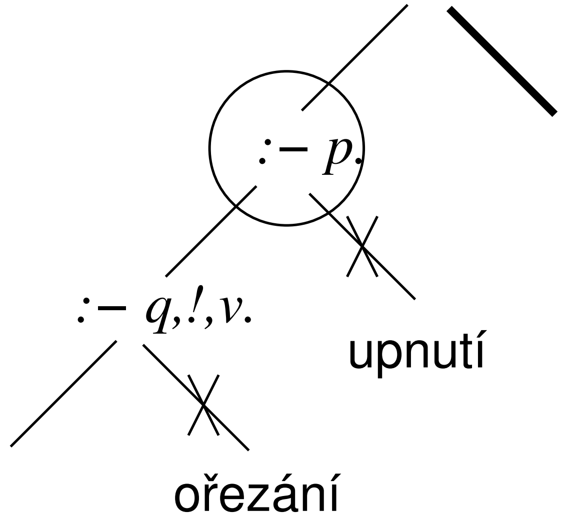
- řez se syntakticky chová jako kterýkoliv jiný literál
- nemá ale žádnou deklarativní sémantiku
- místo toho **mění implementaci programu**
- $p :- q, !, v.$



Řízení implementace: řez

- řez se syntakticky chová jako kterýkoliv jiný literál
- nemá ale žádnou deklarativní sémantiku
- místo toho **mění implementaci programu**
- $p :- q, !, v.$
- snažíme se splnit q
- pokud uspěji

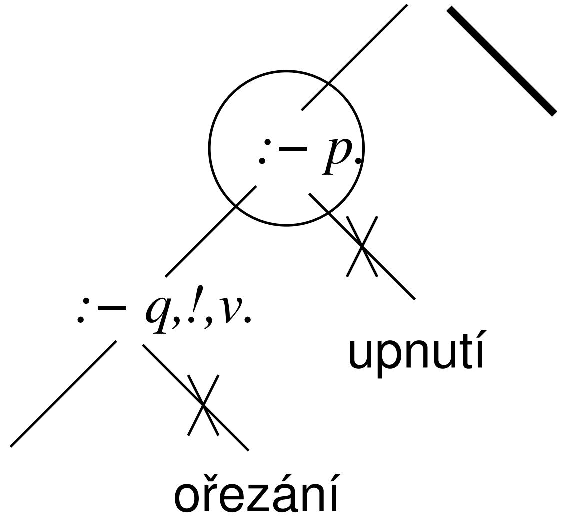
  ⇒ přeskočím řez a pokračuji jako by tam řez nebyl



- pokud ale **neuspěji (a tedy i při backtrackingu) a vracím se přes řez**

  ⇒ **vracím se až na rodiče** $:- p.$ a zkouším další větev

Řízení implementace: řez



- řez se syntakticky chová jako kterýkoliv jiný literál
- nemá ale žádnou deklarativní sémantiku
- místo toho **mění implementaci programu**
- $p :- q, !, v.$
- snažíme se splnit q
- pokud uspěji
  - ⇒ přeskočím řez a pokračuji jako by tam řez nebyl
- pokud ale **neuspěji (a tedy i při backtrackingu) a vracím se přes řez**
  - ⇒ **vracím se až na rodiče** $:-p.$ a zkouším další větev
  - ⇒ nezkouším tedy další možnosti, jak splnit p upnutí
  - ⇒ a nezkouším ani další možnosti, jak splnit q v SLD-stromu ořezání

Příklad: řez

$t:-p,r.$ (1)

$t:-s.$ (2)

$p:-q(X),!,v.$ (3)

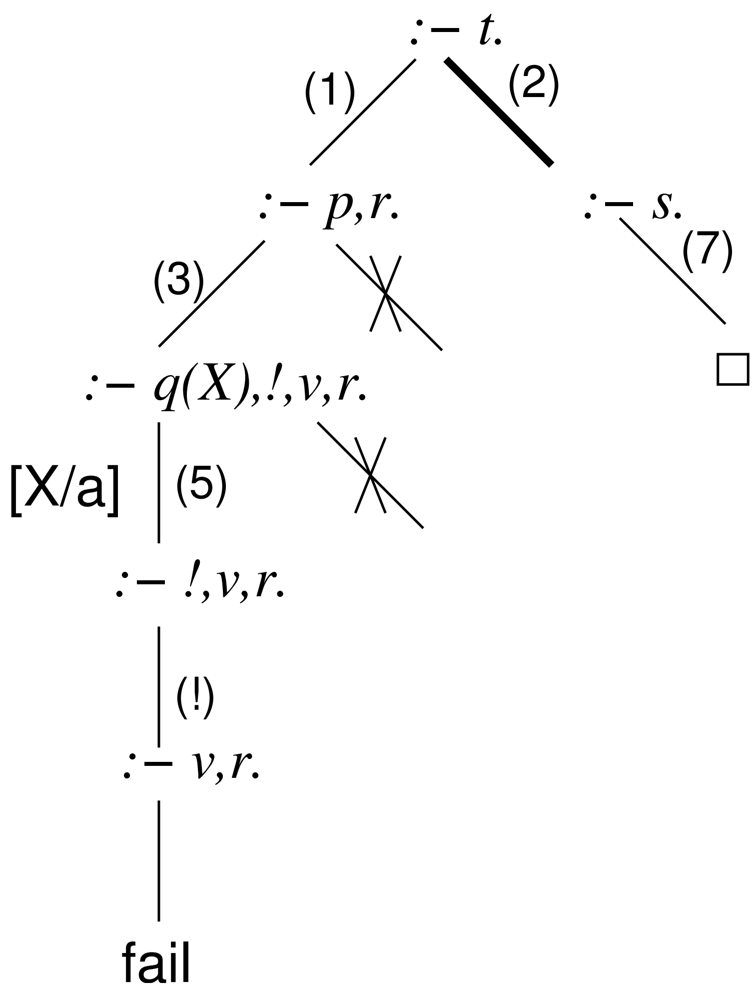
$p:-u,w.$ (4)

$q(a).$ (5)

$q(b).$ (6)

$s.$ (7)

$u.$ (8)



Příklad: řez II

$a(X) :- b(X,Y), !, c(Y).$ (1)

$a(X) :- c(X).$ (2)

$b(2,3).$ (3)

$b(1,2).$ (4)

$c(2).$ (5)

$s(X) :- a(X).$ (6)

$s(X) :- p(X).$ (7)

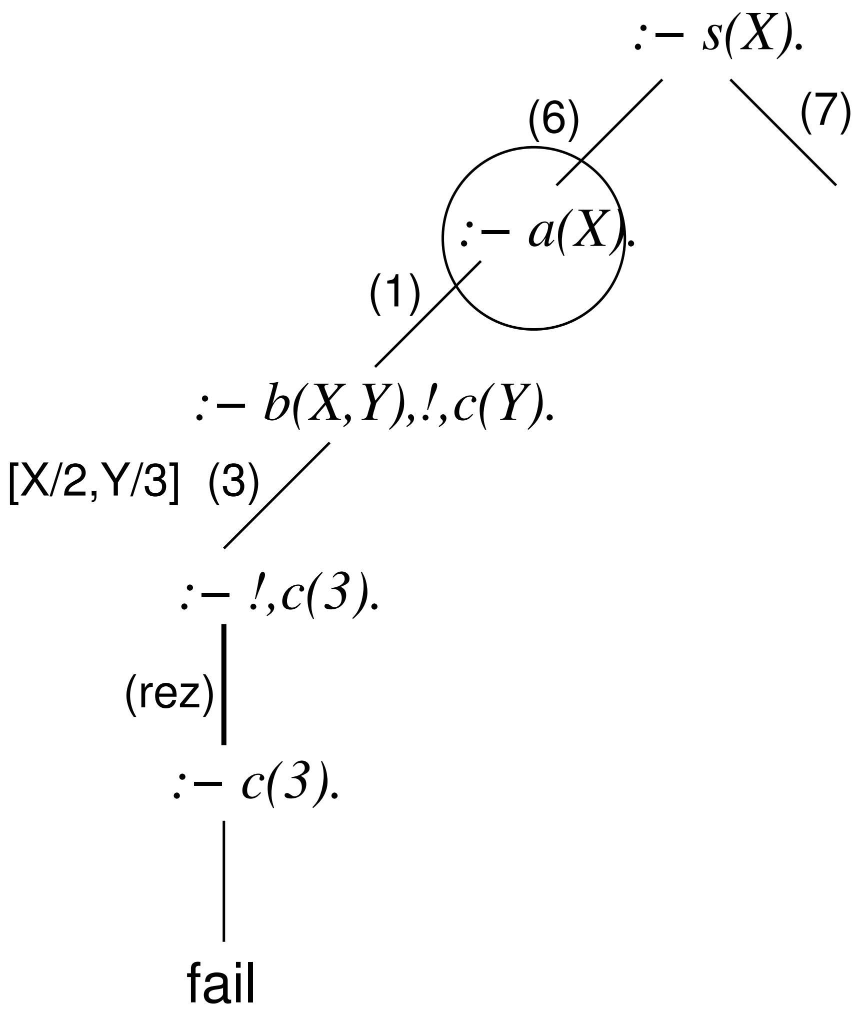
$p(B) :- q(A,B), r(B).$ (8)

$p(A) :- q(A,A).$ (9)

$q(a,a).$ (10)

$q(a,b).$ (11)

$r(b).$ (12)



Příklad: řez III

$a(X) :- b(X,Y), c(Y), !.$ (1)

$a(X) :- c(X).$ (2)

$b(2,3).$ (3)

$b(1,2).$ (4)

$c(2).$ (5)

$s(X) :- a(X).$ (6)

$s(X) :- p(X).$ (7)

$p(B) :- q(A,B), r(B).$ (8)

$p(A) :- q(A,A).$ (9)

$q(a,a).$ (10)

$q(a,b).$ (11)

$r(b).$ (12)