# Rezoluce a logické programování (pokračování)

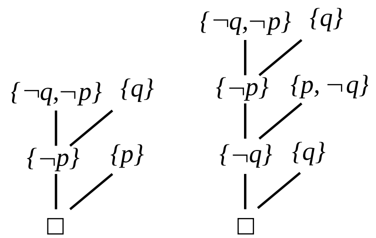
## Logický program

- **Programová klauzule**: právě jeden pozitivní literál (fakt nebo pravidlo)
- **Logický program**: konečná množina programových klauzulí
- Příklad:
  - logický program jako množina klauzulí:
    $P = \{P_1, P_2, P_3\}$
    $P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
  - logický program v prologovské notaci:
    $p.$
    $p :- q.$
    $q.$
  - cílová klauzule: $G = \{\neg q, \neg p\} \qquad :- q, p.$



## Lineární rezoluce pro Hornovy klauzule

- Začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
- Boční klauzule vybíráme z programových klauzulí $P$
- $G = \{\neg q, \neg p\} \qquad P = \{P_1, P_2, P_3\}: \quad P_1 = \{p\}, \quad P_2 = \{p, \neg q\}, \quad P_3 = \{q\}$
- $:- q, p. \qquad p. \qquad p :- q, \qquad q.$




- **Střední klauzule jsou cílové klauzule**



## Lineární vstupní rezoluce

- **Vstupní rezoluce na** $P \cup \{G\}$
  - (opakování:) alespoň jedna z klauzulí použitá při rezoluci je z výchozí vstupní množiny
  - začneme s cílovou klauzulí: $C_0 = G$
  - boční klauzule jsou vždy z $P$ (tj. jsou to programové klauzule)
- (Opakování:) **Lineární rezoluční důkaz** $C$ **z** $S$ je posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0 \rangle, \ldots \langle C_n, B_n \rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - $C_0$ a každá $B_i$ jsou prvky $S$ **nebo některé** $C_j, j < i$
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa $C_i$ a $B_i$
- **Lineární vstupní (*Linear Input*) rezoluce (LI-rezoluce)** $C$ z $P \cup \{G\}$ posloupnost dvojic $\langle C_0, B_0 \rangle, \ldots \langle C_n, B_n \rangle$ taková, že $C = C_{n+1}$ a
  - $C_0 = G$ **a každá** $B_i$ **jsou prvky** $P$ lineární rezoluce + vstupní rezoluce
  - každá $C_{i+1}, i \leq n$ je rezolventa $C_i$ a $B_i$

# Cíle a fakta při lineární rezoluci

- **Věta:** Je-li $S$ nesplnitelná množina Hornových klauzulí, pak $S$ obsahuje alespoň **jeden cíl a jeden fakt**.
  - pokud nepoužiji cíl, mám pouze fakta (1 pozit.literál) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), při rezoluci mi stále zůstává alespoň jeden pozit. literál
  - pokud nepoužiji fakt, mám pouze cíle (negat.literály) a pravidla (1 pozit.literál a alespoň jeden negat. literál), v rezolventě mi stále zůstávají negativní literály
- **Věta:** Existuje-li rezoluční důkaz prázdné množiny z množiny $S$ Hornových klauzulí, pak tento rezoluční strom má v listech **jedinou cílovou klauzuli**.
  - pokud začnu důkaz pravidlem a faktem, pak dostanu zase pravidlo
  - pokud začnu důkaz dvěma pravidly, pak dostanu zase pravidlo
  - na dvou faktech rezolvovat nelze
  - ⇒ dokud nepoužiji cíl pracuji stále s množinou faktů a pravidel
  - pokud použiji v důkazu cílovou klauzuli,
    fakta mi ubírají negat.literály, pravidla mi je přidávají,
    v rezolventě mám stále samé negativní literály, tj. nelze rezolvovat s dalším cílem



# Korektnost a úplnost

- **Věta:** Množina $S$ Hornových klauzulí je nesplnitelná, právě když existuje rezoluční vyvrácení $S$ pomocí **vstupní rezoluce**.
- **Korektnost** platí stejně jako pro ostatní omezení rezoluce
- **Úplnost LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  Nechť $P$ je množina programových klauzulí a $G$ cílová klauzule.
  Je-li množina $P \cup \{G\}$ Hornových klauzulí nesplnitelná,
  pak existuje rezoluční vyvrácení $P \cup \{G\}$ pomocí LI-rezoluce.
  - vstupní rezoluce pro (obecnou) formuli sama o sobě není úplná
  - $\Longrightarrow$ LI-rezoluce aplikovaná na (obecnou) formuli nezaručuje,
    že nalezeneme důkaz, i když formule platí!
- **Význam LI-rezoluce pro Hornovy klauzule**:
  - $P = \{P_1, \dots, P_n\}$, $G = \{G_1, \dots, G_m\}$
  - LI-rezolucí ukážeme nesplnitelnost $P_1 \wedge \dots \wedge P_n \wedge (\neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_m)$
  - pokud tedy předpokládáme, že program $\{P_1, \dots, P_n\}$ platí,
    tak musí být nepravdivá $(\neg G_1 \vee \dots \vee \neg G_m)$, tj. musí platit $G_1 \wedge \dots \wedge G_m$



# Uspořádané klauzule (*definite clauses*)

- Klauzule = množina literálů
- **Uspořádaná klauzule (*definite clause*) = posloupnost literálů**
  - nelze volně měnit pořadí literálů
- **Rezoluční princip pro uspořádané klauzule**:

$$\frac{\{\neg A_0, \dots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \dots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \dots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \dots, \neg A_n\}\sigma}$$

  - **uspořádaná rezolventa**: $\{\neg A_0, \dots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \dots, \neg A_n\}\sigma$
  - $\rho$ je přejmenování proměnných takové, že klauzule $\{A_0, \dots, A_n\}$ a $\{B, B_0, \dots, B_m\}\rho$ nemají společné proměnné
  - $\sigma$ je nejobecnější unifikátor pro $A_i$ a $B\rho$
  - **rezoluce je realizována na literálech** $\neg A_i\sigma$ **a** $B\rho\sigma$
  - je dodržováno pořadí literálů, tj.
    $\{\neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho\}\sigma$ **jde do uspořádané rezolventy přesně na pozici** $\neg A_i\sigma$



# Uspořádané klauzule II.

- Uspořádané klauzule

$$\frac{\{\neg A_0, \dots, \neg A_n\} \qquad \{B, \neg B_0, \dots, \neg B_m\}}{\{\neg A_0, \dots, \neg A_{i-1}, \neg B_0\rho, \dots, \neg B_m\rho, \neg A_{i+1}, \dots, \neg A_n\}\sigma}$$

  Hornovy klauzule

$$\frac{:- A_0, \dots, A_n. \qquad B :- B_0, \dots, B_m.}{:- (A_0, \dots, A_{i-1}, B_0\rho, \dots, B_m\rho, A_{i+1}, \dots, A_n)\sigma.}$$

- Příklad:

$$\frac{\{\neg s(X), \neg t(1), \neg u(X)\} \qquad \{t(Z), \neg q(Z,X), \neg r(3)\}}{\{\neg s(X), \neg q(1,A), \neg r(3), \neg u(X)\}}$$

$$\frac{:- s(X), t(1), u(X). \qquad t(Z) :- q(Z,X), r(3).}{:- s(X), q(1,A), r(3), u(X).}$$

$$\rho = [X/A] \qquad \sigma = [Z/1]$$

# LD-rezoluce

- **LD-rezoluční vyvrácení** množiny uspořádaných klauzulí $P \cup \{G\}$ je posloupnost $\langle G_0, C_0 \rangle, \dots, \langle G_n, C_n \rangle$ taková, že
  - $G_i, C_i$ jsou uspořádané klauzule
  - $G = G_0$
  - $G_{n+1} = \square$
  - $G_i$ je uspořádaná cílová klauzule
  - $C_i$ je přejmenování klauzule z $P$
    - $C_i$ neobsahuje proměnné, které jsou v $G_j, j \leq i$ nebo v $C_k, k \leq i$
  - $G_{i+1}, 0 \leq i \leq n$ je uspořádaná rezolventa $G_i$ a $C_i$
- LD-rezoluce: korektní a úplná



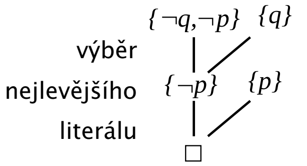
# SLD-rezoluce

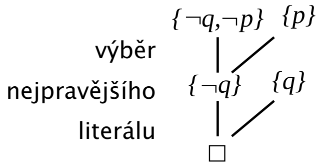
- **Lineární rezoluce se selekčním pravidlem = SLD-rezoluce (*Selected Linear resolution for Definite clauses*)**
  - rezoluce
  - **Selekční** pravidlo
  - **Lineární** rezoluce
  - **Definite** (uspořádané) klauzule
  - vstupní rezoluce
- **Selekční pravidlo** $R$ je funkce, která každé neprázdné klauzuli $C$ přiřazuje nějaký z jejích literálů $R(C) \in C$
  - při rezoluci vybírám s klauzule literál určený selekčním pravidlem
- Pokud se $R$ neuvádí, pak se předpokládá výběr **nejlevějšího literálu**
  - nejlevější literál vybírá i Prolog



# Lineární rezoluce se selekčním pravidlem

- $P = \{\{p\}, \{p, \neg q\}, \{q\}\}, \quad G = \{\neg q, \neg p\}$



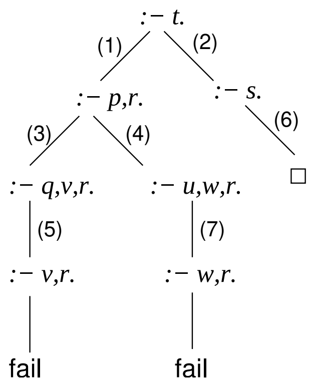

- **SLD-rezoluční vyvrácení** $P \cup \{G\}$ pomocí selekčního pravidla $R$ je LD-rezoluční vyvrácení $\langle G_0, C_0 \rangle, \dots, \langle G_n, C_n \rangle$ takové, že $G = G_0, G_{n+1} = \square$ a $R(G_i)$ je literál rezolvovaný v kroku $i$
- SLD-rezoluce – korektní, úplná
- Efektivita SLD-rezoluce je závislá na
  - selekčním pravidle $R$
  - způsobu výběru příslušné programové klauzule pro tvorbu rezolventy
    - v Prologu se vybírá vždy klauzule, která je v programu první



# Příklad: SLD-strom

| | |
|---|---|
| $t :- p, r.$ | (1) |
| $t :- s.$ | (2) |
| $p :- q, v.$ | (3) |
| $p :- u, w.$ | (4) |
| $q.$ | (5) |
| $s.$ | (6) |
| $u.$ | (7) |

$:- t.$



# Strom výpočtu (SLD-strom)

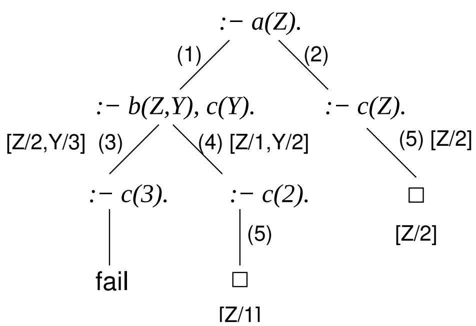
- **SLD-strom** je strom tvořený všemi možnými výpočetními posloupnostmi logického programu $P$ vzhledem k cíli $G$
- kořeny stromy jsou programové klauzule a cílová klauzule $G$
- v uzlech jsou rezolventy
- výchozím kořenem rezoluce je cílová klauzule $G$
- listy jsou dvojího druhu:
  - označené prázdnou klauzulí – jedná se o **úspěšné uzly** (*succes nodes*)
  - označené neprázdnou klauzulí – jedná se o **neúspěšné uzly** (*failure nodes*)
- úplnost SLD-rezoluce zaručuje **existenci** cesty od kořene k úspěšnému uzlu pro každý možný výsledek příslušející cíli $G$



# Příklad: SLD–strom a výsledná substituce

$:-a(Z).$

$a(X):-b(X,Y),c(Y).$ (1)
$a(X):-c(X).$ (2)
$b(2,3).$ (3)
$b(1,2).$ (4)
$c(2).$ (5)




Cvičení:
$p(B):-q(A,B),r(B).$
$p(A):-q(A,A).$
$q(a,a).$
$q(a,b).$
$r(b).$

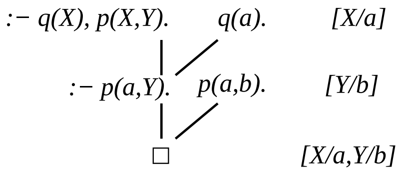
ve výsledné substituci jsou pouze proměnné z dotazu
výsledné substituce jsou $[Z/1]$ a $[Z/2]$
nezajímá mě substituce $[Y/2]$



# Výsledná substituce (*answer substitution*)

*q(a).*
*p(a,b).*

*:−q(X), p(X,Y).*
*X=a, Y=b*




- Každý krok SLD-rezoluce vytváří novou unifikační substituci $\theta_i$
  $\Rightarrow$ potenciální instanciace proměnné ve vstupní cílové klauzuli
- **Výsledná substituce** (*answer substitution*)

  $\theta = \theta_0\theta_1 \cdots \theta_n$ složení unifikací



# Význam SLD-rezolučního vyvrácení $P \cup \{G\}$

- Množina $P$ proaramových klauzulí, cílová klauzule $G$
- **Dokazujeme nesplnitelnost**

  (1) $P \wedge (\forall \vec{X})(\neg G_1(\vec{X}) \vee \neg G_2(\vec{X}) \vee \cdots \vee \neg G_n(\vec{X}))$
  kde $G = \{\neg G_1, \neg G_2, \cdots, \neg G_n\}$ a $\vec{X}$ je vektor proměnných v $G$
  nesplnitelnost (1) je ekvivalentní tvrzení (2) a (3)

  (2) $P \vdash \neg G$

  (3) $P \vdash (\exists \vec{X})(G_1(\vec{X}) \wedge \cdots \wedge G_n(\vec{X}))$

  a jedná se tak o **důkaz existence vhodných objektů**, které na základě vlastností množiny $P$ splňují konjunkci literálů v cílové klauzuli
- Důkaz nesplnitelnosti $P \cup \{G\}$ znamená **nalezení protipříkladu**
  ten pomocí SLD-stromu **konstruuje termy (odpověď)** splňující konjunkci v (3)

# Výpočetní strategie

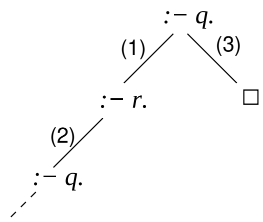
- **Korektní výpočetní strategie** prohledávání stromu výpočtu musí zaručit, že se každý (konečný) výsledek nalézt v konečném čase
- Korektní výpočetní strategie = **prohledávání stromu do šířky**
  - exponenciální paměťová náročnost
  - složité řídící struktury
- Použitelná výpočetní strategie = **prohledávání stromu do hloubky**
  - jednoduché řídící struktury (zásobník)
  - lineární paměťová náročnost
  - **není ale úplná**: nenalezne vyvrácení i když existuje
    - procházení nekonečné větve stromu výpočtu
      $\Rightarrow$ na nekonečných stromech dojde k zacyklení
    - nedostaneme se tak na jiné existující úspěšné uzly



# SLD-rezoluce v Prologu: úplnost

- **Prolog**: prohledávání stromu do hloubky
  $\Rightarrow$ **neúplnost** použité výpočetní strategie
- Implementace SLD-rezoluce v Prologu
  - **není úplná**

| | | |
|---|---|---|
| logický program: | $q :- r.$ | (1) |
| | $r :- q.$ | (2) |
| | $q.$ | (3) |
| dotaz: | $:- q.$ | |






# Test výskytu

- Kontrola, zda se proměnná vyskytuje v termu, kterým ji substituujeme
  - dotaz $:- a(B, B).$
  - logický program: $a(X, f(X)).$
  - vede k: $[B/X]$, $[X/f(X)]$
- Unifikátor pro $g(X_1, \dots, X_n)$ a $g(f(X_0, X_0), f(X_1, X_1), \dots, f(X_{n-1}, X_{n-1}))$

  $X_1 = f(X_0, X_0), \quad X_2 = f(X_1, X_1), \dots, \quad X_n = f(X_{n-1}, X_{n-1})$
  $X_2 = f(f(X_0, X_0), f(X_0, X_0)), \dots$

  délka termu pro $X_k$ exponenciálně narůstá

  $\Longrightarrow$ **exponenciální složitost** na ověření kontroly výskytu
- Test výskytu se **při unifikaci v Prologu neprovádí**
- Důsledek: $? - X = f(X)$ uspěje s $X = f(f(f(f(f(f(f(f(f(f(\dots))))))))))$



# SLD-rezoluce v Prologu: korektnost

- Implementace SLD-rezoluce v Prologu nepoužívá při unifikaci test výskytu

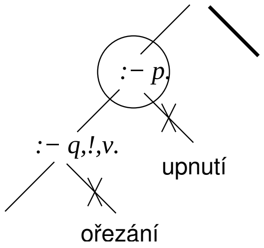
  $\Longrightarrow$ **není korektní**

(1) $t(X) :- p(X, X).$ $\quad :- t(X).$
$p(X, f(X)).$ $\quad X = f(f((f(\dots))))))))))$ problém se projeví

(2) $t :- p(X, X).$ $\quad :- t.$
$p(X, f(X)).$ yes dokazovací systém nehledá unifikátor pro $X$ a $f(X)$

- Řešení: problém typu (2) převést na problém typu (1) ?
  - každá proměnná v hlavě klauzule se objeví i v těle, aby se vynutilo hledání unifikátoru (přidáme $X = X$ pro každou $X$, která se vyskytuje pouze v hlavě)
    $t :- p(X, X).$
    $p(X, f(X)) :- X = X.$
  - optimalizace v kompilátoru mohou způsobit opět odpověď „yes"

# Řízení implementace: řez

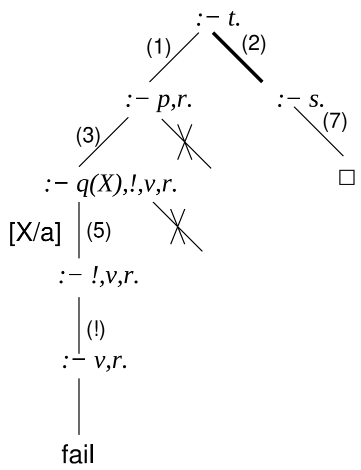



- nemá ale žádnou deklarativní sémantiku
- místo toho **mění implementaci programu**
- $p :- q, !, v.$
- snažíme se splnit $q$
- řez se syntakticky chová jako kterýkoliv jiný literál
- pokud uspěji
  - ⇒ přeskočím řez a pokračuji jako by tam řez nebyl
- pokud ale **neuspěji (a tedy i při backtrackingu) a vracím se přes řez**
  - ⇒ **vracím se až na rodiče** $:- p.$ a zkouším další větev
  - ⇒ nezkouším tedy další možnosti, jak splnit $p$ upnutí
  - ⇒ a nezkouším ani další možnosti, jak splnit $q$ v SLD-stromu ořezání



# Příklad: řez

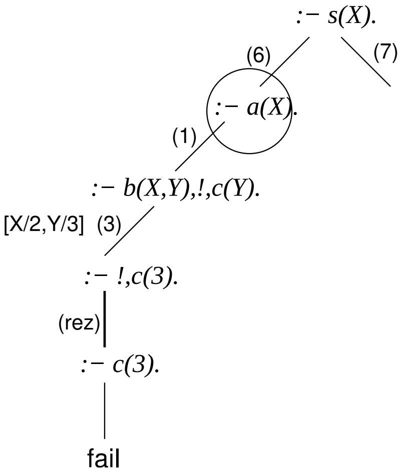
| | |
|---|---|
| $t :- p, r.$ | (1) |
| $t :- s.$ | (2) |
| $p :- q(X), !, v.$ | (3) |
| $p :- u, w.$ | (4) |
| $q(a).$ | (5) |
| $q(b).$ | (6) |
| $s.$ | (7) |
| $u.$ | (8) |






# Příklad: řez II

| | |
|---|---|
| $a(X) :- b(X, Y), !, c(Y).$ | (1) |
| $a(X) :- c(X).$ | (2) |
| $b(2, 3).$ | (3) |
| $b(1, 2).$ | (4) |
| $c(2).$ | (5) |
| $s(X) :- a(X).$ | (6) |
| $s(X) :- p(X).$ | (7) |
| $p(B) :- q(A, B), r(B).$ | (8) |
| $p(A) :- q(A, A).$ | (9) |
| $q(a, a).$ | (10) |
| $q(a, b).$ | (11) |
| $r(b).$ | (12) |






# Příklad: řez III

| | |
|---|---|
| $a(X) :- b(X, Y), c(Y), !.$ | (1) |
| $a(X) :- c(X).$ | (2) |
| $b(2, 3).$ | (3) |
| $b(1, 2).$ | (4) |
| $c(2).$ | (5) |
| $s(X) :- a(X).$ | (6) |
| $s(X) :- p(X).$ | (7) |
| $p(B) :- q(A, B), r(B).$ | (8) |
| $p(A) :- q(A, A).$ | (9) |
| $q(a, a).$ | (10) |
| $q(a, b).$ | (11) |
| $r(b).$ | (12) |