9. AFINNÍ PODPROSTORY A SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

30. listopadu 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n

a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jakožto množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

Abstrakt přednášky

V této kapitole se budeme opět věnovat soustavám lineárních rovnic.

Dokážeme, že množina řešení každé lineární (homogenní) soustavy tvoří afinní (lineární) podprostor vhodného sloupcového prostoru K^n

a obráceně, každý takový afinní (lineární) podprostor lze popsat jakožto množinu řešení vhodné lineární (homogenní) soustavy.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah přednášky

Podprostor řešení I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$. Uvažujme homogenní soustavu lineárních rovnic s maticí $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí $\mathbf{A}$ a pravou stranou $\mathbf{b}$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí **A** a pravou stranou **b**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

Podprostor řešení II

Dále uvažme nehomogenní soustavu s maticí **A** a pravou stranou **b**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Množiny jejich řešení označíme

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\},$$

resp.

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^n : \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

Podprostor řešení III

Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$, přičemž $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\varphi$.

Podprostor řešení III

Předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ je definované lineární zobrazení $\varphi : K^n \to K^m$, přičemž $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ker}\varphi$.

Z toho okamžitě vyplývá

Tvrzení

Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ množina $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ řešení homogenní soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ tvoří lineární podprostor vektorového prostoru K^n.

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Podprostor řešení IV

Každou bázi prostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ nazýváme ***fundamentálním systémem řešení*** soustavy $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Potom každé řešení příslušné homogenní soustavy můžeme jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů z fundamentálního systému řešení,

a naopak, každá lineární kombinace vektorů fundamentálního systému je řešením příslušné soustavy.

Fundamentální systém řešení najdeme následujícím postupem:

Podprostor řešení V

Matici **A** upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$.

Podprostor řešení V

Matici $\mathbf{A}$ upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m\times n}$.

Množinu $\{1, \ldots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny J a J', podle toho, zda se v j-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Podprostor řešení V

Matici **A** upravíme pomocí ERO na redukovaný stupňovitý tvar $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$.

Množinu $\{1, \ldots, n\}$ rozdělíme na dvě podmnožiny J a J', podle toho, zda se v j-tém sloupci matice **B** nachází nebo nenachází vedoucí prvek nějakého jejího řádku.

Označme k počet prvků množiny J' a zapišme ji ve tvaru $J' = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_k\}$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \dots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pro $i \neq l$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pro $i \neq l$.

Pro $j \in J$ vypočítáme hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrů $v_{j_1 l}, \ldots, v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\mathbf{v}_l$ vyhovoval podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$.

Podprostor řešení VI

Pro každý index $j_l \in J'$ sestrojíme vektor $\mathbf{v}_l = (v_{1l}, \ldots, v_{nl})^T \in K^n$ takto:

Zvolíme $v_{j_l l} = 1$ a $v_{j_i l} = 0$ pro $i \neq l$.

Pro $j \in J$ vypočítáme hodnoty v_{jl} k uvedeným hodnotám parametrů $v_{j_1 l}, \ldots, v_{j_k l}$ tak, aby celý vektor $\mathbf{v}_l$ vyhovoval podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}_l = \mathbf{0}$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A})$. Přitom zřejmě platí $k = n - h(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení VII

Příklad

Předpokládejme, že jsme matici **A** *pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 3 a 4.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Druhá volba parametrů je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$.

Podprostor řešení VIII

Tedy neznámé x_2 a x_5 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_3 a x_4 si vyjádříme s jejich pomocí.

Naše první volba je $x_2 = 1$, $x_5 = 0$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0, 0, 0)^T$.

Druhá volba parametrů je $x_2 = 0$, $x_5 = 1$. Tomu odpovídá vektor $\mathbf{v}_2 = (1/3, 0, -1/2, 2, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ tvoří bázi podprostoru (fundamentální systém) řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^5$.

Podprostor řešení IX

Tvrzení

Pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ *platí*

$$\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Podprostor řešení NS I

Tvrzení
Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \underline{\ })$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \underline{\;})$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(b) *Pokud* $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, *pak* $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Podprostor řešení NS I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

(a) *Pokud* $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\_)$, *pak* $\mathbf{y} - \mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(b) *Pokud* $\mathbf{z} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$, *pak* $\mathbf{z} + \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b})$.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) &= \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{z} + \mathbf{x};\ \mathbf{x} \in \mathcal{R}(\mathbf{A})\} \\ &= \mathbf{z} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] \\ &= \{\mathbf{z} + c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k;\ c_1, \dots, c_k \in K\}. \end{aligned}$$

Podprostor řešení NS II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Podprostor řešení NS II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Pokud soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má aspoň jedno řešení, tak* $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ *je afinní podprostor v* K^n *se zaměřením* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Podprostor řešení NS II

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.

Pokud soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má aspoň jedno řešení, tak* $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$ *je afinní podprostor v* K^n *se zaměřením* $\mathcal{R}(\mathbf{A})$.

To znamená, že

$$\mathrm{Dir}\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$$

a

$$\dim\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = n - h(\mathbf{A}).$$

Frobeniova věta I

Věta

(Frobenius) *Nechť* $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$.
Potom nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *má řešení právě tehdy, když* $h(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = h(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta II

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení $\mathbf{z} \in K^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$). Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta II

Soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má alespoň jedno řešení $\mathbf{z} \in K^n$ právě tehdy, když $\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\varphi$ (kde $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$). Pak $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathbf{z} + \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Frobeniova věta říká: nehomogenní soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ nemá řešení právě tehdy, když se při úpravě její rozšířené matice $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar objeví nějaký řádek tvaru $(0, \ldots, 0 \mid d) \in K^{n+1}$, kde $0 \neq d \in K$. Takovýto řádek totiž zodpovídá rovnici $0 = d$.

Frobeniova věta III

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$, kde $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ a $\mathbf{c} \in K^m$, tak $\mathbf{B}$ je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Frobeniova věta III

Pokud upravíme pomocí ERO rozšířenou matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ na redukovaný stupňovitý tvar $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$, kde $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ a $\mathbf{c} \in K^m$, tak $\mathbf{B}$ je též v redukovaném stupňovitém tvaru.

Potom $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$ právě tehdy, když se žádný vedoucí prvek nějakého řádku matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{c})$ nenachází v posledním, t. j. $n + 1$-ním sloupci.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů $z_{j_1} = \ldots = z_{j_k} = 0$ pro $j_l \in J'$.

Frobeniova věta IV

Bázi prostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B})$ najdeme postupem popsaným v paragrafu 9.1.

Nech J, J' a k mají dříve uvedený význam.

Jedno řešení $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ nehomogenní soustavy dostaneme volbou parametrů $z_{j_1} = \ldots = z_{j_k} = 0$ pro $j_l \in J'$.

Zbývající hodnoty z_j potom vypočítáme tak, aby $\mathbf{z}$ vyhovovalo podmínce $\mathbf{B} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{c}$, t. j. $z_j = c_j$ pro $j \in J$.

Frobeniova věta V

Příklad

Předpokládejme, že jsme matici $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ *pomocí ERO už upravili na redukovaný stupňovitý tvar*

$$(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 1/4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 & 6 & -2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Tedy neznámé x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_2 a x_3 si vyjádříme pomocí nich.

Frobeniova věta VI

Vidíme, že $h(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) = h(\mathbf{B}) = 3$, tedy $\mathcal{R}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) = \mathcal{R}(\mathbf{B} \mid \mathbf{c}) \neq \emptyset$.

Vedoucí prvky řádků se nacházejí ve sloupcích 1, 2 a 3.

Tedy neznámé x_4, x_5 a x_6 si zvolíme za parametry a neznámé x_1, x_2 a x_3 si vyjádříme pomocí nich.

První volbě $x_4 = 1$, $x_5 = x_6 = 0$ odpovídá vektor $\mathbf{v}_1 = (-3, -4, -1, 1, 0, 0)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ příslušní homogenní soustavy.

Frobeniova věta VII

Druhá volba $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 0$ nám dá vektor $\mathbf{v}_2 = (-1/4, -2, 5, 0, 1, 0)^T$.

Třetí volbou $x_4 = x_5 = 0$, $x_6 = 1$ získáme vektor $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -6, 0, 0, 1)^T$.

Potom vektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tvoří bázi podprostoru řešení $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathbb{R}^6$ příslušní homogenní soustavy.

Konečně volbou parametrů $x_4 = x_5 = x_6 = 0$ získáme jedno řešení $\mathbf{z} = (2, -1, -2/7, 0, 0, 0)^T$ nehomogenní soustavy.

Frobeniova věta VIII

Výsledek můžeme zapsat do tabulky:

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{z}$
x_1	-3	$-1/4$	0	2
x_2	-4	-2	1	-1
x_3	-1	5	-6	$-2/7$
x_4	1	0	0	0
x_5	0	1	0	0
x_6	0	0	1	0

Parametrické a všeobecné rovnice I

Každý afinní podprostor $M \subseteq K^n$ má tvar

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k] = \mathbf{p} + [\alpha]$$

pro nějaký bod $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)^T \in M$ a vhodnou uspořádanou k-tici $\alpha = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z K^n, kde $\mathbf{u}_j = (u_{1j}, \ldots, u_{nj})^T$.

Parametrické a všeobecné rovnice II

To znamená, že pro libovolné $\mathbf{x} \in K^n$ platí $\mathbf{x} \in M$ právě tehdy, když existuje $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ tak, že

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t},$$

kde jsme uspořádanou k-tici α jako obyčejně ztotožnili s maticí $(u_{ij}) \in K^{n \times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$.

Parametrické a všeobecné rovnice III

Rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ je maticovým zápisem ***parametrických rovnic*** afinního podprostoru $M \subseteq K^n$.

Parametrické a všeobecné rovnice III

Rovnost $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ je maticovým zápisem ***parametrických rovnic*** afinního podprostoru $M \subseteq K^n$.

Vektor $\mathbf{t} \in K^n$ nazýváme ***vektorem parametrů*** a jeho složky $t_1, \ldots, t_k \in K$ ***parametry***.

Parametrické a všeobecné rovnice IV

Po rozepsání do složek

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + u_{11}t_1 + u_{12}t_2 + \ldots + u_{1k}t_k \\ x_2 &= p_2 + u_{21}t_1 + u_{22}t_2 + \ldots + u_{2k}t_k \\ \\ x_n &= p_n + u_{n1}t_1 + u_{n2}t_n + \ldots + u_{nk}t_k \end{aligned}$$

dostaneme obvyklejší tvar, se kterým jsme sa v dimenzi $n = 2$ resp. $n = 3$ už potkali v středoškolské analytické geometrii.

Parametrické a všeobecné rovnice V

Jsou-li navíc vektory $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ lineárně nezávislé, což můžeme vždy dosáhnout vynecháním "nadbytečných vektorů", pak parametrické rovnice podprostoru M nám přímo ukáží jeho dimenzi: $\dim M = k$.

Parametrické a všeobecné rovnice VI

Zápis afinního podprostoru $M \subseteq K^n$ ve tvaru $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, kde $\mathbf{p} \in M$ a α je nejaká uspořádaná k-tice, která generuje jeho zaměření $\mathrm{Dir} M$ (můžeme si dovolit předpokládat, že α je dokonce báze v $\mathrm{Dir} M$), budeme nazývat jeho ***parametrickým vyjádřením***.

Parametrické a všeobecné rovnice VI

Zápis afinního podprostoru $M \subseteq K^n$ ve tvaru $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, kde $\mathbf{p} \in M$ a α je nejaká uspořádaná k-tice, která generuje jeho zaměření $\mathrm{Dir} M$ (můžeme si dovolit předpokládat, že α je dokonce báze v $\mathrm{Dir} M$), budeme nazývat jeho ***parametrickým vyjádřením***.

Parametrické vyjádření $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ afinního podprostoru můžeme přímo přepsat do jeho parametrických rovnic $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$, ($\mathbf{t} \in K^k$). Naopak, z jeho parametrických rovnic můžeme okamžitě získat jeho parametrické vyjádření.

Parametrické a všeobecné rovnice VII

Každá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$ (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \subseteq K^n$.

Parametrické a všeobecné rovnice VII

Každá soustava lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ s rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \in K^{m \times (n+1)}$ (pokud má řešení), popisuje afinní podprostor $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) \subseteq K^n$.

Vyřešit soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ znamená vlastne najít nějaké pěkné parametrické rovnice afinního podprostoru $\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Parametrické a všeobecné rovnice VIII

Nechť tedy $M = \mathbf{p} + [\alpha]$ je afinní podprostor v K^n, daný bodem $\mathbf{p} \in K^n$ a uspořádanou k-ticí $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ vektorů z K^n, kterou ztotožníme s maticí $\alpha = (u_{ij}) \in K^{n \times k}$ se sloupci $\mathbf{u}_j$.

Parametrické a všeobecné rovnice IX

Parametrické rovnice $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \alpha \cdot \mathbf{t}$ podprostoru M, kde $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in K^n$ je vektor neznámých a $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)^T \in K^k$ je vektor parametrů, můžeme přepsat do tvaru

$$\mathbf{I}_n \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p},$$

který lze reprezentovat pomocí blokové matice

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}).$$

Parametrické a všeobecné rovnice X

Naše metoda bude založená na ***eliminaci parametrů*** $t_1, \dots, t_k$ úpravou této matice pomocí ERO.

Parametrické a všeobecné rovnice X

Naše metoda bude založená na ***eliminaci parametrů*** $t_1, \ldots, t_k$ úpravou této matice pomocí ERO.

Matici $(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p})$ budeme upravovat na řádkově ekvivalentní matici tak, aby prostřední blok vo výsledné matici byl ve stupňovitém tvaru. Mohou pak nastat dvě možnosti

Parametrické a všeobecné rovnice XI

(1) $h(\alpha) = n$, což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové.

Parametrické a všeobecné rovnice XI

(1) $h(\alpha) = n$, což poznáme podle toho, že všechny řádky prostředního bloku výsledné matice jsou nenulové.

V tomto případě $M = V$ a všeobecné rovnice tohoto podprostoru tvoří prázdná soustava (t. j. soustava, která neobsahuje žádnou rovnici).

Parametrické a všeobecné rovnice XII

(2) $h(\alpha) < n$. Pak můžeme prostřední blok výsledné matice rozdělit do dvou pod sebou umístěných bloků $\binom{\mathbf{D}}{\mathbf{0}}$, kde horní blok $\mathbf{D}$ je stupňovitá matice typu $h(\alpha) \times k$, která má všechny řádky nenulové, tedy dolní nulový blok má rozměr $(n - h(\alpha)) \times k$.

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Parametrické a všeobecné rovnice XIII

Toto rozdělení prostředního bloku indukuje rozdělení celé výsledné matice do bloků

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Potom $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ jsou všeobecné rovnice afinního podprostoru M, t. j. platí $M = \mathbf{p} + [\alpha] = \mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b})$.

Parametrické a všeobecné rovnice XIV

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \boldsymbol{\alpha} \,|\, \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right),$$

Parametrické a všeobecné rovnice XIV

Popsaný algoritmus můžeme stručně shrnout do následujícího schématu

$$(\mathbf{I}_n \,|\, \alpha \,|\, \mathbf{p}) \xrightarrow{ERO} \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right),$$

kde **D** je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky (jejichž počet je tedy nutně $h(\mathbf{D}) = h(\alpha)$).

Parametrické a všeobecné rovnice XV

Z k-tice α můžeme vybrat bázi zaměření $\mathrm{Dir} M = [\alpha]$: je tvořená vektory $\mathbf{u}_{j_1}, \ldots, \mathbf{u}_{j_l}$, kde $1 \leq j_1 < \ldots < j_l \leq k$ jsou indexy těch sloupců matice $\mathbf{D}$, ve kterých se nacházejí vedoucí prvky jejich řádků.

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n \times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^n$.

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^n$.

Pokud bloková matice $(\mathbf{B} \mid \mathbf{C} \mid \mathbf{p})$ *je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

Parametrické a všeobecné rovnice XVI

Tvrzení

Nechť $\mathbf{B} \in K^{n\times m}$, $\mathbf{C} \in K^{n\times k}$ *a* $\mathbf{p} \in K^{n}$.

Pokud bloková matice $(\mathbf{B} \,|\, \mathbf{C} \,|\, \mathbf{p})$ *je řádkově ekvivalentní s blokovou maticí*

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{D} & \mathbf{b}' \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{b} \end{array}\right).$$

kde $\mathbf{D}$ *je matice v stupňovitém tvaru s nenulovými řádky, tak*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A} \,|\, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in K^m;\ (\exists\, \mathbf{t} \in K^k)(\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{p})\}.$$

Rovnice průniku a spojení afinních podprostorů

Uvažujme tři možnosti zadání původních podprostorů:

(1) Oba podprostory jsou zadané všeobecnými rovnicemi.
(2) Oba podprostory jsou zadané parametricky.
(3) Jeden podprostor je zadaný pomocí všeobecných rovnic a druhý parametricky.

(1) Nechť afinní podprostory $M, N \subseteq K^n$ mají všeobecné rovnice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ resp. $\mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{c}$, kde $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in K^m$, $\mathbf{B} \in K^{l \times n}$, $\mathbf{c} \in K^l$. Potom všeobecnými rovnicemi průniku $M \cap N$ je soustava

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{c} \end{aligned}$$

s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array} \right).$$

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ můžeme získat vyřešením této soustavy.

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ můžeme získat vyřešením této soustavy.

Parametrické vyjádření podprostoru $M \sqcup N$ můžeme získat tak, že nejprve najdeme parametrická vyjádření podprostorů M a N a použijeme úvahy z předchozí kapitoly. Následně pak můžeme odvodit všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$.

Příklad

Afinní podprostory M, N vektorového prostoru $\mathbf{Q}^4$ *jsou dané soustavami*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned} .$$

Upravme rozšířené matice původních soustav:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & -1 \end{array}\right).$$

Z upravených matic okamžitě dostáváme parametrické vyjádření původních podprostorů (matice v hranatých závorkách označuje lineární podprostor generovaný jejími sloupci)

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pokud napíšeme obě upravené rozšírené matice všeobecných rovnic podprostorů M a N do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovníc podprostoru $M \cap N$.

Pokud napíšeme obě upravené rozšírené matice všeobecných rovnic podprostorů M a N do bloků pod sebe, dostaneme rozšířenou matici všeobecných rovníc podprostoru $M \cap N$.

Její úpravou na redukovaný stupňovitý tvar vyjde

$$\left(\begin{array}{cccrr|} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 9/5 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & -21/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \\ -21/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Odtud už přímo vyplývá parametrické vyjádření

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 9/5 \\ -21/5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Zjistili jsme, že dvojrozměrné afinní podprostory M, N mají jednorozměrný průnik, tedy jsou *různoběžné*. Preto též $\dim(M \sqcup N) = 2 + 2 - 1 = 3$.

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů $\mathrm{Dir} M$ a $\mathrm{Dir} N$, úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících.

Dáme-li vedle sebe generátory směrových podprostorů $\mathrm{Dir} M$ a $\mathrm{Dir} N$, úpravou příslušné matice zjistíme, že první tři jsou lineárně nezávislé a poslední z nich je lineární kombinací předcházejících.

Tedy sloupce matice

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tvoří bázi zaměření afinního podprostoru $M \sqcup N$.

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde $\mathbf{p} = (3, 9/5, -21/5, 0)^T$.

Jeho parametrické vyjádření je

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\beta],$$

kde $\mathbf{p} = (3, 9/5, -21/5, 0)^T$.

Úpravou blokové matice $(\mathbf{I}_4 \mid \beta \mid \mathbf{p})$ podle našeho algoritmu, výměnou prvého a posledního řádku dostaneme všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$:

$$x_1 = 3\,.$$

(2) Nechť $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, $N = \mathbf{q} + [\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n.

(2) Nechť $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, $N = \mathbf{q} + [\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n.

Potom $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$ a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice $(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta)$ můžeme dostat bázi zaměření $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$.

(2) Nechť $M = \mathbf{p} + [\alpha]$, $N = \mathbf{q} + [\beta]$ jsou parametrické vyjádření dvou afinních podprostorů v K^n.

Potom $M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta]$ a vynecháním vhodných sloupců z blokové matice $(\mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta)$ můžeme dostat bázi zaměření $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$.

Všeobecné rovnice podprostoru $M \sqcup N$ dostaneme úpravou blokové matice $(\mathbf{I}_n \,|\, \mathbf{q} - \mathbf{p}, \alpha, \beta \,|\, \mathbf{p})$, případně matice, v které je prostřední blok nahrazený bází zaměření $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$ podle našeho algoritmu.

Všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů M, N převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, získáme tak, že parametrické rovnice každého z podprostorů M, N převedeme na všeobecné rovnice a ty pak spojíme dohromady.

Parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ dostaneme vyřešením jeho všeobecných rovnic.

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku $M \cap N$: lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření $\mathrm{Dir} M$, $\mathrm{Dir} N$, $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$, tedy i parametrické rovnice spojení $M \sqcup N$.

Jiná cesta k parametrickým rovnicím průniku $M \cap N$: lze při ní jako vedlejší produkt získat báze zaměření $\mathrm{Dir} M$, $\mathrm{Dir} N$, $\mathrm{Dir}(M \sqcup N)$, tedy i parametrické rovnice spojení $M \sqcup N$.

Metoda: blokovou matici $(\alpha \,|\, \beta \,|\, \mathbf{q} - \mathbf{p})$ upravujeme pomocí ERO na stupňovitý tvar

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' & \mathbf{c}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{c} \end{array}\right),$$

kde matice $\mathbf{A}'$ má všechny řádky nenulové (tedy lineárně nezávislé a jejich počet je $h(\mathbf{A}') = h(\alpha) = \dim M$).

Průnik $M \cap N$ je tvořený všemi $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} \in N$, které patří zároveň do M, t. j. existuje vektor parametrů $\mathbf{s}$ tak, že $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s}$. Hledáme tedy všechny vektory parametrů $\mathbf{t}$, ke kterým existuje nějaký vektor parametrů $\mathbf{s}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{s} = \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}).$$

K danému $\mathbf{t}$ existuje takovéto $\mathbf{s}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

K danému **t** existuje takovéto **s** právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

které dosadíme do parametrických rovnic podprostoru N.

K danému $\mathbf{t}$ existuje takovéto $\mathbf{s}$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{c}$.

Vyřešením této soustavy dostaneme parametrické vyjádření

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z},$$

které dosadíme do parametrických rovnic podprostoru N.

Dostaneme tak parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru $M \cap N$.

Příklad

Nechť

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix},$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

jsou afinní podprostory v $\mathbf{R}^4$.

Zřejmě $\mathrm{Dir} N_1 = \mathrm{Dir} N_2$; označme tento lineární podprostor D. Obě úlohy o dvojicích podprostorů M, N_1 i M, N_2 budeme řešit současně.

Zřejmě $\mathrm{Dir} N_1 = \mathrm{Dir} N_2$; označme tento lineární podprostor D. Obě úlohy o dvojicích podprostorů M, N_1 i M, N_2 budeme řešit současně.
Platí

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 11 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor $\mathrm{Dir} M \cap D$ je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}$, kde $\boldsymbol{\beta}$ je matice generátorů D (a jeho báze) a $\mathbf{t}$ vyhovuje uvedené homogenní rovnici.

Pokud si z matice na pravé straně odmyslíme krajní pravý blok, po vynechání rovnice $0 = 0$ z ní dostaneme soustavu

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 0.$$

Lineární podprostor $\mathrm{Dir} M \cap D$ je tvořený právě všemi lineárními kombinacemi $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}$, kde $\boldsymbol{\beta}$ je matice generátorů D (a jeho báze) a $\mathbf{t}$ vyhovuje uvedené homogenní rovnici.

Tedy $\dim(\mathrm{Dir} M \cap D) = \dim \mathrm{Dir} M = 2$. Proto $\mathrm{Dir} M \subseteq D$ a platí $M \parallel N_1$ a $M \parallel N_2$.

Soustava

$$\begin{aligned} 4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, aby jím určený bod z N_1 patřil i do M, nemá řešení.

Soustava

$$\begin{aligned} 4t_1 - 2t_2 + 6t_3 &= 2 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$, aby jím určený bod z N_1 patřil i do M, nemá řešení.

Proto $M \cap N_1 = \emptyset$ a M, N_1 jsou *pravé rovnobežky*.

Naopak, analogická soustava pro dvojici M, N_2 vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Naopak, analogická soustava pro dvojici M, N_2 vede na jedinou, očividně řešitelnou rovnici

$$4t_1 - 2t_2 + 6t_3 = 1.$$

Tedy $M \subseteq N_2$.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$ je daný parametricky.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$ je daný parametricky.

Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, stačí najít všeobecné rovnice podprostoru N a přidat je k soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(3) Nechť afinní podprostor $M \subseteq K^n$ je daný všeobecnými rovnicemi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a afinní podprostor $N = \mathbf{q} + [\beta] \subseteq K^n$ je daný parametricky.

Pokud hledáme všeobecné rovnice průniku $M \cap N$, stačí najít všeobecné rovnice podprostoru N a přidat je k soustavě $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Jejich vyřešením potom můžeme obdržet i parametrické vyjádření $M \cap N$.

Pokud hledáme popis spojení $M \sqcup N$, nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru M a z parametrických vyjádření obou podprostorů M, N sestavit parametrické vyjádření $M \sqcup N$.

Pokud hledáme popis spojení $M \sqcup N$, nejvýhodnější je vyřešit všeobecné rovnice podprostoru M a z parametrických vyjádření obou podprostorů M, N sestavit parametrické vyjádření $M \sqcup N$.

Eliminací parametrů dostaneme všeobecné rovnice podpriestoru $M \sqcup N$.

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M.

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M.

Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \beta \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

Jiná metoda, jak najít parametrické vyjádření průniku $M \cap N$ spočívá v dosazení parametrického vyjádření podprostoru N do všeobecných rovnic podprostoru M.

Tím dostaneme soustavu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t}) = \mathbf{b},$$

nebo po úpravě s ní ekvivalentní soustavu

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q},$$

které musí vyhovovat vektor parametrů $\mathbf{t}$, aby jím určený bod $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{t} \in N$ patřil i do podprostoru M, tedy do průniku $M \cap N$.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A} \cdot \beta \,|\, \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A} \cdot \beta \,|\, \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$.

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$

a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru N.

Uvedenou soustavu vyřešíme úpravou její rozšířené matice $(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \,|\, \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{q})$.

Podobně jako v případě (2) řešení dostaneme v parametrickém tvaru

$$\mathbf{t} = \mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}$$

a dosadíme ho do parametrických rovnic podprostoru N.

Tak získáme parametrické rovnice

$$\mathbf{x} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{r} + \gamma \cdot \mathbf{z}) = (\mathbf{q} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \gamma) \cdot \mathbf{z}$$

podprostoru $M \cap N$.

Příklad

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbf{R}^4$ *má všeobecné rovnice*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Příklad

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbf{R}^4$ *má všeobecné rovnice*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Afinní podprostor $N \subseteq \mathbf{R}^4$ *je určený jako afinní obal* $N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ *bodů* $\mathbf{p} = (3, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{q} = (4, -1, 2, 2)^T$, $\mathbf{r} = (4, 1, 2, 0)^T$ *a* $\mathbf{s} = (7, 3, 4, 5)^T$.

Příklad

Afinní podprostor $M \subseteq \mathbf{R}^4$ má všeobecné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Afinní podprostor $N \subseteq \mathbf{R}^4$ je určený jako afinní obal $N = \ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ bodů $\mathbf{p} = (3, 0, 1, 1)^T$, $\mathbf{q} = (4, -1, 2, 2)^T$, $\mathbf{r} = (4, 1, 2, 0)^T$ a $\mathbf{s} = (7, 3, 4, 5)^T$.

Jeho parametrické vyjádření potom je

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{r} - \mathbf{p}, \mathbf{s} - \mathbf{p}] \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

Protože

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

bod tvaru $\mathbf{p} + t_1(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + t_2(\mathbf{r} - \mathbf{p}) + t_3(\mathbf{s} - \mathbf{p}) \in N$ patří do průniku $M \cap N$ právě tehdy, když příslušný vektor parametrů $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$ vyhovuje soustavě s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Podprostor řešení této soustavy má parametrické vyjádření

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right].$$

Dosazením do parametrického vyjádření N dostaneme

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{array} \right]$$

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a $\dim(M \cap N) = 1$.

Hodnost matice soustavy podprostoru M je 2, proto $\dim M = 4 - 2 = 2$, a $\dim N = 3$.

Tedy

$$M \cap N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

a $\dim(M \cap N) = 1$.

Hodnost matice soustavy podprostoru M je 2, proto $\dim M = 4 - 2 = 2$, a $\dim N = 3$.

Z tohoto důvodu $M \cap N$ je vlastní podprostor jak v M tak v N, tj. M, N jsou *různoběžné*.