

10. DETERMINANTY

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

8. prosince 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme **determinanty** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K , řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme **determinanty** čtvercových matic libovolného rozměru $n \times n$ nad pevným tělesem K , řekneme si jejich základní vlastnosti a naučíme se je vypočítat včetně příkladů jejich aplikace.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n jsou přirozená čísla.

Obsah přednášky

Determinanty

Permutace

Orientovaný objem a multilineární alternující funkce

Definice a základní vlastnosti determinantu

Charakterizace determinantu a regulárních matic

Laplaceův rozvoj determinantu

Výpočet determinantu

Inverzní matice a Cramerovo pravidlo

Permutace I

Nechť X je libovolná množina. **Permutací** množiny X rozumíme libovolné bijektivní zobrazení $\sigma : X \rightarrow X$.

Množinu všech permutací množiny X značíme $\mathcal{S}(X)$.

Permutace II

Je-li X konečná množina, tak počet prvků množiny $\mathcal{S}(X)$ je daný známým vztahem

$$\#\mathcal{S}(X) = (\#X)!,$$

kde $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ je **faktoriál** přirozeného čísla n (přitom $0! = 1! = 1$).

Permutace III

Transformace $f : X \rightarrow X$ **konečné** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Permutace III

Transformace $f : X \rightarrow X$ **konečné** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Protože složení $\sigma \circ \tau$ dvou permutací $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ dává opět permutaci množiny X , kompozice \circ je asociativní binární operace na množině $\mathcal{S}(X)$ a id_X je její neutrální prvek.

Permutace III

Transformace $f : X \rightarrow X$ **konečné** množiny X je injektivní právě tehdy, když je surjektivní.

Protože složení $\sigma \circ \tau$ dvou permutací $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ dává opět permutaci množiny X , kompozice \circ je asociativní binární operace na množině $\mathcal{S}(X)$ a id_X je její neutrální prvek.

Snadno se můžeme přesvědčit, že – mimo případ, když $\# X \leq 2$, – tato operace není komutativní.

Permutace IV

Pro $X = \{1, 2, \dots, n\}$ místo $\mathcal{S}(X)$ píšeme \mathcal{S}_n .

Permutace IV

Pro $X = \{1, 2, \dots, n\}$ místo $\mathcal{S}(X)$ píšeme S_n .

Permutaci $\sigma \in S_n$ obvykle zapisujeme ve tvaru

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Permutace V

Prvky množiny \mathcal{S}_3 , t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Permutace V

Prvky množiny \mathcal{S}_3 , t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Označme si identickou permutaci této množiny jako ι ,

Permutace V

Prvky množiny \mathcal{S}_3 , t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Označme si identickou permutaci této množiny jako ι ,
otočení kolem těžiště trojúhelníka proti směru resp. ve směru hodinových ručiček o uhel $\pi/3$ jako ϱ resp. ϱ^{-1} ,

Permutace V

Prvky množiny \mathcal{S}_3 , t. j. permutace množiny $\{1, 2, 3\}$, si můžeme představit jako symetrie rovnostranného trojúhelníka s vrcholy označenými čísly 1, 2, 3.

Označme si identickou permutaci této množiny jako ι ,

otočení kolem těžiště trojúhelníka proti směru resp. ve směru hodinových ručiček o uhel $\pi/3$ jako ϱ resp. ϱ^{-1} ,

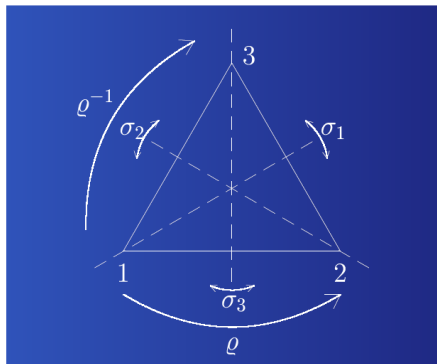
a osovou souměrnost podle osy procházející i -tým vrcholem a středem protilehlé strany jako σ_i , pro $i = 1, 2, 3$.

Permutace VI

Množina permutací \mathcal{S}_3 se bude skládat z permutací

$$\begin{aligned} \iota &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \varrho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ \varrho^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Permutace VII



Permutace VIII

Multiplikativní tabulka binární operace \circ na množině \mathcal{S}_3 má následující tvar:

| | | | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| \circ | ι | ϱ | ϱ^{-1} | σ_1 | σ_2 | σ_3 |
| ι | ι | ϱ | ϱ^{-1} | σ_1 | σ_2 | σ_3 |
| ϱ | ϱ | ϱ^{-1} | ι | σ_3 | σ_1 | σ_2 |
| ϱ^{-1} | ϱ^{-1} | ι | ϱ | σ_2 | σ_3 | σ_1 |
| σ_1 | σ_1 | σ_2 | σ_3 | ι | ϱ | ϱ^{-1} |
| σ_2 | σ_2 | σ_3 | σ_1 | ϱ^{-1} | ι | ϱ |
| σ_3 | σ_3 | σ_1 | σ_2 | ϱ | ϱ^{-1} | ι |

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme **transpozicí**, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme **transpozicí**, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X .

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme **transpozicí**, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X .

Zřejmě $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}_3$ jsou transpozice.

Permutace IX

Permutaci $\sigma \in \mathcal{S}(X)$ nazýváme **transpozicí**, pokud existují $x, y \in X$ tak, že $x \neq y$, $\sigma(x) = y$, $\sigma(y) = x$ a $\sigma(z) = z$ pro každé $z \in X \setminus \{x, y\}$.

Jinak řečeno, transpozice je výměna dvou prvků množiny X .

Zřejmě $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}_3$ jsou transpozice.

Z názoru je zřejmé, že každou permutaci σ konečné množiny X můžeme obdržet postupnými výměnami dvojic prvků, je tedy každá takováto permutace je kompozicí transpozic.

Permutace X

Tento rozklad na transpozice není jednoznačný:

Permutace X

Tento rozklad na transpozice není jednoznačný:

např. $\iota \in \mathcal{S}_3$ můžeme vyjádřit jako ι , t. j. kompozici 0 transpozic, a rovněž jakožto

Permutace X

Tento rozklad na transpozice není jednoznačný:

např. $\iota \in \mathcal{S}_3$ můžeme vyjádřit jako ι , t. j. kompozici 0 transpozic, a rovněž jakožto

$$\iota = \sigma_1 \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_3,$$

t. j. alespoň třemi dalšími možnostmi jakožto kompozici dvou transpozic.

Permutace XI

Délkou permutace σ konečné množiny X nazveme nejmenší počet transpozic, na jejichž kompozici můžeme σ rozložit, a označíme ji $|\sigma|$.

Permutace XI

Délkou permutace σ konečné množiny X nazveme nejmenší počet transpozic, na jejichž kompozici můžeme σ rozložit, a označíme ji $|\sigma|$.

Samotná délka $|\sigma|$ není ve skutečnosti důležitá, význam má pouze parita tohoto čísla, t. j. vlastně výraz $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{|\sigma|}$, který nazýváme **znaménkem permutace** σ .

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývajú **sudá** resp. **lichá**, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1 .

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývajú **sudá** resp. **lichá**, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1 .

Z následující věty vyplývá, že při určování znaménka permutace σ můžeme použít její **libovolný** rozklad na transpozice $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ a nemusíme sa starat o to, zda tento rozklad je skutečně nejkratší

Permutace XII

Permutace σ konečné množiny X sa nazývajú **sudá** resp. **lichá**, je-li číslo $|\sigma|$ sudé resp. liché, t. j. pokud její znak je 1 resp. -1 .

Z následující věty vyplývá, že při určování znaménka permutace σ můžeme použít její **libovolný** rozklad na transpozice $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ a nemusíme sa starat o to, zda tento rozklad je skutečně nejkratší

– pro libovolný takovýto rozklad totiž platí

$$(-1)^{|\sigma|} = (-1)^k.$$

Permutace XIII

Věta

Nechť X je konečná množina. Potom pro libovolné $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ platí

$$(-1)^{|\sigma \circ \tau|} = (-1)^{|\sigma|} \cdot (-1)^{|\tau|}.$$

Permutace XIII

Věta

Nechť X je konečná množina. Potom pro libovolné $\sigma, \tau \in \mathcal{S}(X)$ platí

$$(-1)^{|\sigma \circ \tau|} = (-1)^{|\sigma|} \cdot (-1)^{|\tau|}.$$

Člen $\sigma(j) - \sigma(i)$ je záporný právě tehdy, když $i < j$ a $\sigma(i) > \sigma(j)$,
– každou takovouto dvojici (i, j) nazýváme **inverzí** permutace σ .

Orientovaný objem a MAF I

Orientovaný objem a multilineární alternující funkce

Otázka: Jak vypadají vzorce pro plošný obsah rovnoběžníku v rovině v \mathbb{R}^2 , jehož dvě sousední strany tvoří vektory

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{v} = (v_1, v_2)^T?$$

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru \mathbb{R}^3 , jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru \mathbb{R}^3 , jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Ujasníme si vlastností takovýchto vzorců. Uvidíme, že tyto vlastnosti už jednoznačně (až na volbu jednotkového obsahu či objemu) určují hledané vzorce nejen v rovině či v třírozměrném prostoru.

Orientovaný objem a MAF II

Otázka: Jak vypadají vzorce pro objem rovnoběžnostěnu v prostoru \mathbb{R}^3 , jehož tři sousední hrany tvoří vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$?

Ujasníme si vlastností takovýchto vzorců. Uvidíme, že tyto vlastnosti už jednoznačně (až na volbu jednotkového obsahu či objemu) určují hledané vzorce nejen v rovině či v třírozměrném prostoru.

Zobecníme je na n -rozměrné vektorové prostory K^n nad libovolným tělesem K .

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X .

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X .

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X .

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Obsah je navíc **aditivní** funkce, t. j. pro útvary X, Y takové, že $P(X \cap Y) = 0$, platí

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y).$$

Orientovaný objem a MAF III

Označme $P(X)$ obsah rovinného útvaru X .

Zřejmě $P(X)$ je vždy nezáporné reálné číslo a pro shodné útvary X, Y platí $P(X) = P(Y)$.

Obsah je navíc **aditivní** funkce, t. j. pro útvary X, Y takové, že $P(X \cap Y) = 0$, platí

$$P(X \cup Y) = P(X) + P(Y).$$

Konečně, $P(X) = 0$ pro libovolnou úsečku X .

Orientovaný objem a MAF IV

Obsah rovnoběžníka $\{a\mathbf{u} + b\mathbf{v}; a, b \in \langle 0, 1 \rangle\}$ určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ budeme značit $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Orientovaný objem a MAF IV

Obsah rovnoběžníka $\{a\mathbf{u} + b\mathbf{v}; a, b \in \langle 0, 1 \rangle\}$ určeného vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ budeme značit $P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Platí pak rovnosti

$$P(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c|P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

pro libovolné $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{Z}$.

Orientovaný objem a MAF V

Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.

Orientovaný objem a MAF V

Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.



Orientovaný objem a MAF V

Situace pro $c = 3$ je znázorněná na následujícím obrázku.



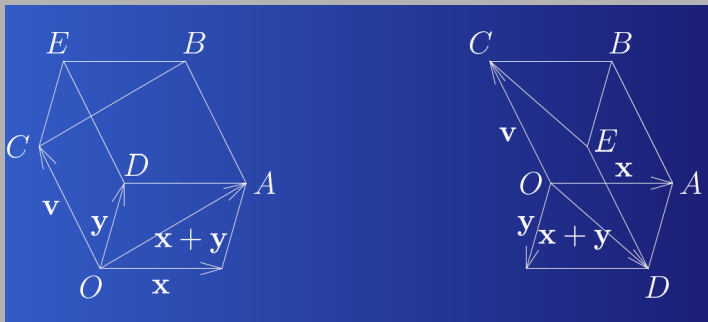
Platnost druhé rovnosti pro všechna $c \in \mathbb{Q}$ plyne z platnosti pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $m \in \mathbb{Z}$. Platnost pro všechna $c \in \mathbb{R}$ plyne ze spojitosti obsahu.

Orientovaný objem a MAF VI

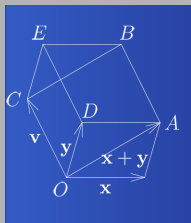
Uvažme následující dva obrázky.

Orientovaný objem a MAF VI

Uvažme následující dva obrázky.

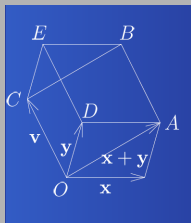


Orientovaný objem a MAF VII



V prvním případě určují vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, \mathbf{v} rovnoběžník $OABC$, vektory \mathbf{y} , \mathbf{v} rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů \mathbf{x} , \mathbf{v} je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Orientovaný objem a MAF VII

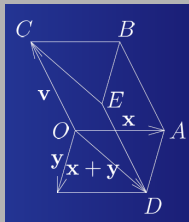


V prvním případě určují vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, \mathbf{v} rovnoběžník $OABC$, vektory \mathbf{y} , \mathbf{v} rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů \mathbf{x} , \mathbf{v} je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Ze shodnosti trojúhelníků OAD , CBE potom na základě uvedených vlastností obsahu vyplývá rovnost

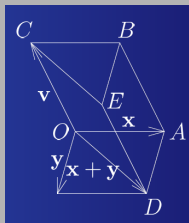
$$P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + P(\mathbf{y}, \mathbf{v})$$

Orientovaný objem a MAF VIII



V druhém případě určují vektory \mathbf{x} , \mathbf{v} rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, \mathbf{v} rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů \mathbf{y} , \mathbf{v} je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Orientovaný objem a MAF VIII



V druhém případě určí vektory \mathbf{x} , \mathbf{v} rovnoběžník $OABC$, vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, \mathbf{v} rovnoběžník $ODEC$ a rovnoběžník vektorů \mathbf{y} , \mathbf{v} je shodný s rovnoběžníkem $DABE$.

Ze shodnosti trojúhelníků ODA , CEB vyplývá
 $P(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v}) + P(\mathbf{y}, \mathbf{v})$, tedy

$$P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{v}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - P(\mathbf{y}, \mathbf{v}),$$

což je nepříjemné překvapení, určitě bychome dali přednost stejnému vzorci.

Orientovaný objem a MAF IX

Všimněme si však, že kratší otočení vektoru \mathbf{y} do vektoru \mathbf{v} je orientované proti kratším otočením vektorů \mathbf{x} i $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ do vektoru \mathbf{v} .

Orientovaný objem a MAF IX

Všimněme si však, že kratší otočení vektoru \mathbf{y} do vektoru \mathbf{v} je orientované proti kratším otočením vektorů \mathbf{x} i $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ do vektoru \mathbf{v} .

V druhém případě by sa nám proto hodilo, aby obsah rovnoběžníka určeného vektory \mathbf{y} , \mathbf{v} měl z tohoto důvodu opačné znaménko než obsahy rovnoběžníků příslušejících vektorům \mathbf{x} , \mathbf{v} resp. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, \mathbf{v} .

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnout, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich **orientovaný plošný obsah**, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnout, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich **orientovaný plošný obsah**, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Původní nezáporný plošný obsah potom dostaneme jako absolutní hodnotu orientovaného obsahu.

Orientovaný objem a MAF X

Tento cíl můžeme dosáhnout, pokud místo plošného obsahu vektorových rovnoběžníků budeme uvažovat jejich **orientovaný plošný obsah**, který mění znaménko záměnou pořadí dvou vektorů, tedy může nabývat i záporné hodnoty.

Původní nezáporný plošný obsah potom dostaneme jako absolutní hodnotu orientovaného obsahu.

Tento přístup nám navíc umožní zbavit se absolutní hodnoty v rovnosti $P(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |c|P(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K , provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K , provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K , provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že zobrazení $F : V^n \rightarrow K$ je

(a) n -**lineární** nebo též **multilineární**,

Orientovaný objem a MAF XI

Pokud nahradíme reálná čísla libovolným tělesem K , provedené úvahy nás přivádí k následujícím definicím.

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $1 \leq n \in \mathbb{N}$.

Říkáme, že zobrazení $F : V^n \rightarrow K$ je

(a) *n -lineární* nebo též *multilineární*,

pokud pro každé $1 \leq j \leq n$ a libovolné vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ přiřazení

$$\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n)$$

Orientovaný objem a MAF XII

definuje lineární zobrazení $V \rightarrow K$, t.j. pro všechna $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $a, b \in K$ platí

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ = aF(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{x}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n) \\ + bF(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{j-1}, \mathbf{y}, \mathbf{u}_{j+1}, \dots, \mathbf{u}_n); \end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XIII

- (b) **antisymetrické**, pokud pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ platí

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) = \\ -F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n).$$

Orientovaný objem a MAF XIV

- (c) **alternující**, pokud pro všechna $1 \leq i < j \leq n$ a všechny vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ z podmínky $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$ vyplývá

$$F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_j, \dots, \mathbf{u}_n) = 0.$$

Orientovaný objem a MAF XV

Lemma

Nechť $F : V^n \rightarrow K$ je libovolné zobrazení, K těleso, V vektorový prostor nad K .

- (a) Je-li $\text{char}K \neq 2$ a F je antisymetrické, tak F je alternující.*
- (b) Je-li F je multilineární a alternující, je F je antisymetrické.*

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma

Nechť $F : V^n \rightarrow K$ je funkce, K těleso, V vektorový prostor nad K , $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ a σ je libovolné zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma

Nechť $F : V^n \rightarrow K$ je funkce, K těleso, V vektorový prostor nad K , $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ a σ je libovolné zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

- (a) Je-li σ permutace a F je antisymetrické, tak*
- $$F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n);$$

Orientovaný objem a MAF XVI

Lemma

Nechť $F : V^n \rightarrow K$ je funkce, K těleso, V vektorový prostor nad K , $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ a σ je libovolné zobrazení množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

(a) Je-li σ permutace a F je antisymetrické, tak

$$F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n);$$

(b) Pokud σ není permutace a F je alternující, tak

$$F(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)}) = 0.$$

Orientovaný objem a MAF XVII

Lemma

Nechť $F : V^n \rightarrow K$ je multilineární alternující funkce. Potom pro libovolné $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ platí:

Orientovaný objem a MAF XVII

Lemma

Nechť $F : V^n \rightarrow K$ je multilineární alternující funkce. Potom pro libovolné $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in V$ platí:

- (a) Připočtením skalárního násobku nějakého z vektorů k jinému vektoru se hodnota $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ nezmění, t. j. pro libovolné $c \in K$ a $i, j \leq n$ platí*

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j + c\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_n) \\ = F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_n). \end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XVII

(b) Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé, tak $F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0$.

Orientovaný objem a MAF XVII

(b) Pokud jsou vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ lineárně závislé, tak
$$F(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = 0.$$

Jak vypadají všechny bilineární (t. j. 2-lineární) alternující funkce $F : K^2 \times K^2 \rightarrow K^2$ nad tělesem K ?

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$
z K^2 .

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$
z K^2 .

Pokud dvakrát po sobě využijeme bilinearitu a na závěr
alternaci a antisymetrii F , postupně dostaneme

Orientovaný objem a MAF XVIII

Zvolme libovolné vektory $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2$ z K^2 .

Pokud dvakrát po sobě využijeme bilinearitu a na závěr alternaci a antisymetrii F , postupně dostaneme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= F(u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) = u_1F(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}) + u_2F(\mathbf{e}_2, \mathbf{v}) \\ &= u_1F(\mathbf{e}_1, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) + u_2F(\mathbf{e}_2, v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2) \\ &= u_1v_1F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + u_1v_2F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &\quad + u_2v_1F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + u_2v_2F(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \\ &= F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \cdot (u_1v_2 - u_2v_1) = F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

Orientovaný objem a MAF XIX

kde výraz

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

je determinant matice

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}.$$

Orientovaný objem a MAF XX

Podobným způsobem můžeme odvodit tvar libovolné n -lineární alternující funkce $F : K^{n \times n} \rightarrow K$.

Orientovaný objem a MAF XX

Podobným způsobem můžeme odvodit tvar libovolné n -lineární alternující funkce $F : K^{n \times n} \rightarrow K$.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ je matice se sloupci

$$\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \dots + a_{nj}\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

Orientovaný objem a MAF XXI

S využitím n -linearity F pro každý z n sloupců matice \mathbf{A} můžeme výraz $F(\mathbf{A})$ postupně roznásobit, čímž dostaneme součet n^n členů tvaru

$$a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}),$$

z kterých každý odpovídá právě jednomu zobrazení σ množiny $\{1, \dots, n\}$ do sebe.

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle předchozího lemmatu o nulové hodnotě alternující funkce sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle předchozího lemmatu o nulové hodnotě alternující funkce sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0

a pro $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Orientovaný objem a MAF XXII

Podle předchozího lemmatu o nulové hodnotě alternující funkce sčítance příslušející zobrazením $\sigma \notin \mathcal{S}_n$ jsou všechny rovné 0

a pro $\sigma \in \mathcal{S}_n$ platí

$$F(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n).$$

Na závěr tak dostáváme

$$\begin{aligned} F(\mathbf{A}) &= F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= F(\mathbf{I}_n) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}, \end{aligned}$$

kde příslušná suma obsahuje $n!$ sčítanců, jeden pro každou permutaci $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Základní vlastnosti determinantu I

Determinantem čtvercové matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ nazýváme výraz

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}.$$

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používáme též označení $|\mathbf{A}|$.

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používáme též označení $|\mathbf{A}|$.

Determinant čtvercové matice řádu n budeme nazývat ***determinant řádu n*** .

Základní vlastnosti determinantu II

Pokud nehrozí záměna s absolutní hodnotou, používáme též označení $|\mathbf{A}|$.

Determinant čtvercové matice řádu n budeme nazývat **determinant řádu n** .

Pro matici $(a_{ij}) \in K^{3 \times 3}$ dostáváme vzorec

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23},$$

známý jako **Sarrusovo pravidlo**.

Základní vlastnosti determinantu III

Tvrzení

Determinant transponované matice se rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Základní vlastnosti determinantu III

Tvrzení

Determinant transponované matice se rovná determinantu původní matice, t. j.

$$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$$

pro libovolnou matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$.

Všechny výsledky o determinantech matic si zachovají svou platnost, pokud v nich každý výskyt slova "sloupec" nahradíme slovem "řádek" a naopak.

Základní vlastnosti determinantu IV

Tvrzení

Nechť $1 \leq m < n$ a $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je bloková matice tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{B} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times (n-m)}$ a $\mathbf{D} \in K^{(n-m) \times (n-m)}$. Potom

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \cdot \det \mathbf{D}.$$

Základní vlastnosti determinantu V

(1) Pokud $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ jsou čtvercové matice, tak

$$\det \text{diag}(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k) = \det \mathbf{A}_1 \cdot \dots \cdot \det \mathbf{A}_k.$$

(2) Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ se nazývá **horní (dolní) trojúhelníková matice**, pokud $a_{ij} = 0$ pro $i < j$ (resp. pro $i > j$). Pro horní i dolní trojúhelníkové matice (tedy i diagonální) platí

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

t. j. determinant takové matice je součinem jejích diagonálních prvků.

Charakterizace determinantu I

Věta

Determinant řádu n je n -lineární alternující funkce $K^{n \times n} \rightarrow K$ sloupců matice.

Navíc, pro každý skalár $c \in K$ existuje jediné multilineární alternující zobrazení $F : K^{n \times n} \rightarrow K$ sloupců matice tak, že $F(\mathbf{I}_n) = c$.

Toto F je dané předpisem

$$F(\mathbf{A}) = c \det \mathbf{A}.$$

Charakterizace determinantu II

Determinant $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ je jednoznačně určený jako n -lineární alternující funkce sloupců matice tak, že

$$\det \mathbf{I}_n = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Charakterizace determinantu II

Determinant $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ je jednoznačně určený jako n -lineární alternující funkce sloupců matice tak, že

$$\det \mathbf{I}_n = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

Tato rovnost koresponduje s přirozenou volbou jednotky orientovaného n -rozměrného objemu v K^n – je jí orientovaný objem rovnoběžnostěny určeného vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ (v tomto pořadí).

Charakterizace determinantu III

Věta

(Cauchyho věta o determinantu součinu matic)

Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

Charakterizace determinantu III

Věta

(Cauchyho věta o determinantu součinu matic)

Pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B};$$

t. j. determinant součinu matic se rovná součinu jejich determinantů.

Charakterizace determinantu IV

Věta

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$. V tomto

Charakterizace determinantu IV

Věta

Čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $\det \mathbf{A} \neq 0$. V tomto případě

$$\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}.$$

Laplaceův rozvoj determinantu I

Pro $n = 0, 1$ není co dokazovat. Budeme v dalším předpokládat, že $n \geq 2$.

Důkaz věty o charakterizaci determinantu Nejprve dokážeme, že determinant je alternující funkce.

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je taková matice, že

$$\mathbf{s}_i(\mathbf{A}) = \mathbf{s}_j(\mathbf{A}))$$

pro nějaké $i < j$.

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Množinu všech sudých permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ budeme označovat jako \mathcal{A}_n .

Laplaceův rozvoj determinantu II

Označme $\tau \in \mathcal{S}_n$ transpozici, která zamění prvky i a j (a ostatní prvky ponechá na místě).

Pro všechna $k, l \leq n$ platí

$$a_{kl} = a_{\tau(k)l}.$$

Množinu všech sudých permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ budeme označovat jako \mathcal{A}_n .

Zřejmě přiřazením $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ je daná bijekce $\mathcal{A}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$.

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A}))$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}\end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau \circ \sigma)(1)1} \cdots a_{(\tau \circ \sigma)(n)n}\end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau \circ \sigma)(1)1} \cdots a_{(\tau \circ \sigma)(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} (a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - a_{(\tau \circ \sigma)(1)1} \cdots a_{(\tau \circ \sigma)(n)n})\end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu III

Podle definice determinantu

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \det(\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n - \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} a_{(\tau \circ \sigma)(1)1} \cdots a_{(\tau \circ \sigma)(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_n} (a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} - a_{(\tau \circ \sigma)(1)1} \cdots a_{(\tau \circ \sigma)(n)n}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j -tého sloupce $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$.

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j -tého sloupce $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$.

Pro $i \leq n$ označme $\mathcal{S}_n(i, j) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n; i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n(i, j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j-1)j-1} a_{\sigma(j+1)j+1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Laplaceův rozvoj determinantu IV

Dokážeme, že $\det \mathbf{A}$ je lineární funkce j -tého sloupce $(a_{1j}, \dots, a_{nj})^T$.

Pro $i \leq n$ označme $S_n(i, j) = \{\sigma \in S_n; i = \sigma(j)\}$ a položme

$$\tilde{a}_{ij} = \sum_{\sigma \in S_n(i, j)} (-1)^{|\sigma|} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(j-1)j-1} a_{\sigma(j+1)j+1} \cdots a_{\sigma(n)n}.$$

Potom zřejmě

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ij} a_{ij} = (\tilde{a}_{1j}, \dots, \tilde{a}_{nj}) \cdot (a_{1j}, \dots, a_{nj})^T,$$

což dokazuje linearitu.

Laplaceův rozvoj determinantu V

Determinant je rovněž multilineární alternující funkce řádků matice a (protože $\sigma \in \mathcal{S}_n(i, j) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j, i)$) pro i -tý řádek (a_{i1}, \dots, a_{in}) matice \mathbf{A} její determinant má rozvoj

Laplaceův rozvoj determinantu V

Determinant je rovněž multilineární alternující funkce řádků matice a (protože $\sigma \in \mathcal{S}_n(i, j) \Leftrightarrow \sigma^{-1} \in \mathcal{S}_n(j, i)$) pro i -tý řádek (a_{i1}, \dots, a_{in}) matice \mathbf{A} její determinant má rozvoj

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij} \\ &= (a_{i1}, \dots, a_{in}) \cdot (\tilde{a}_{i1}, \dots, \tilde{a}_{in})^T.\end{aligned}$$

se stejně definovanými koeficienty \tilde{a}_{ij} .

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek \tilde{a}_{ij} nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} v matici \mathbf{A} .

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek \tilde{a}_{ij} nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} v matici \mathbf{A} .

Matici $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ nazýváme **maticí algebraických doplňků** k matici \mathbf{A} .

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek \tilde{a}_{ij} nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} v matici \mathbf{A} .

Matici $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ nazýváme **maticí algebraických doplňků** k matici \mathbf{A} .

Tvrzení

Nechť \mathbf{A}_{ij} označuje matici řádu $n - 1$, která vznikne z matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Laplaceův rozvoj determinantu VI

Uvedený prvek \tilde{a}_{ij} nazýváme **algebraickým doplňkem** prvku a_{ij} v matici \mathbf{A} .

Matici $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ij})_{n \times n}$ nazýváme **maticí algebraických doplňků** k matici \mathbf{A} .

Tvrzení

Nechť \mathbf{A}_{ij} označuje matici řádu $n - 1$, která vznikne z matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Potom

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ij}|.$$

Laplaceův rozvoj determinantu VII

Determinanty matic, které vzniknou vynecháním některých řádků a stejného počtu sloupců z matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, nazýváme jejími **minory**, případně **subdeterminanty** determinantu $|\mathbf{A}|$.

Laplaceův rozvoj determinantu VIII

Věta

(Laplaceova věta o rozvoji determinantu)

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $1 \leq k, l \leq n$. Potom

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |\mathbf{A}_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} |\mathbf{A}_{il}| a_{il}. \end{aligned}$$

Laplaceův rozvoj determinantu VIII

Věta

(**Laplaceova věta o rozvoji determinantu**)

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $1 \leq k, l \leq n$. Potom

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} |\mathbf{A}_{kj}| \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} |\mathbf{A}_{il}| a_{il}. \end{aligned}$$

Uvedené součty nazýváme **Laplaceovými rozvoji** determinantu $|\mathbf{A}|$ – první podle k -tého řádku, druhý podle l -tého sloupce.

Výpočet determinantu I

Každý determinant je multilineární alternující funkcí jak řádků tak i sloupců matice.

Pravidla

- (0) Determinant trojúhelníkové matice se rovná součinu jejích diagonálních prvků.

Výpočet determinantu II

- (1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.

Výpočet determinantu II

- (1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.
- (2) Vynásobením nějakého řádku nebo sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ se její determinant změní na c -násobek původní hodnoty.

Výpočet determinantu II

- (1) Výměnou pořadí dvou řádků nebo sloupců matice se hodnota jejího determinantu změní na opačnou.
- (2) Vynásobením nějakého řádku nebo sloupce matice nenulovým skalárem $c \in K$ se její determinant změní na c -násobek původní hodnoty.
- (3) Pripočtením skalárního násobku nějakého řádku matice k jejímu jinému řádku, resp. násobku nějakého jejího sloupce k jinému sloupci se hodnota jejího determinantu nezmění.

Výpočet determinantu III

- (4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.

Výpočet determinantu III

- (4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.
- (5) Necht' všechny prvky i -tého řádku případně j -tého sloupce matice \mathbf{A} s výjimkou prvku a_{ij} jsou rovné 0. Potom

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|.$$

Výpočet determinantu III

- (4) Pokud matice obsahuje nulový řádek nebo sloupec, případně dva stejné řádky nebo sloupce, tak její determinant je 0.
- (5) Necht' všechny prvky i -tého řádku případně j -tého sloupce matice \mathbf{A} s výjimkou prvku a_{ij} jsou rovné 0. Potom

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}|.$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}.$$

Výpočet determinantu IV

Vypočítáme tzv. **Vandermondův determinant** řádu n

$$VD_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu V

Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků dostaneme

$$VD_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu VI

Následným rozvojem podle prvního sloupce dostaneme

$$\text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu VI

Následným rozvojem podle prvního sloupce dostaneme

$$\text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \dots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \dots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Odečtěme nyní od každého sloupce počínaje druhým x_1 -násobek předcházejícího sloupce.

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k) , kde $1 \leq i \leq n - 1$, $1 \leq k \leq n - 1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k) , kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i -tého řádku činitel $x_{i+1} - x_1$, postupně nám vyjde

$$\text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k) , kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i -tého řádku činitel $x_{i+1} - x_1$, postupně nám vyjde

$$\text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu VII

V determinantu, který získáme, je na místě (i, k) , kde $1 \leq i \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$, prvek

$$(x_{i+1}^k - x_1^k) - x_1(x_{i+1}^{k-1} - x_1^{k-1}) = x_{i+1}^{k-1}(x_{i+1} - x_1).$$

Pokud vytkneme z i -tého řádku činitel $x_{i+1} - x_1$, postupně nám vyjde

$$VD_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix}.$$

Výpočet determinantu VIII

$$\text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu VIII

$$\text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu VIII

$$VD_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Výpočet determinantu VIII

$$\begin{aligned} \text{VD}_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} \\ &= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \text{VD}_{n-1}(x_2, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Podobně

$$\text{VD}_{n-1}(x_2, \dots, x_n) = (x_3 - x_2) \dots (x_n - x_2) \text{VD}_{n-2}(x_3, \dots, x_n),$$

atd.

Výpočet determinantu IX

Protože zejména $VD_1(x_n) = 1$, dostaneme výsledek

$$VD_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

kde symbolom \prod označujeme součin příslušných činitelů.

Inverzní matice a Cramerovo prav. I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $1 \leq i, k \leq n$ jsou různé indexy. Označme \mathbf{B} matici, která vznikne z matice \mathbf{A} nahrazením jejího k -tého řádku i -tým řádkem.

Potom matice \mathbf{B} má (aspoň) dva řádky stejné, a to i -tý a k -tý, proto $|\mathbf{B}| = 0$.

Na druhé straně se matice \mathbf{A} a \mathbf{B} liší nanejvýš v k -tém řádku, proto $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{B}_{kj}$ pro každé $1 \leq j \leq n$.

Inverzní matice a Cramerovo prav. II

Z tohoto důvodu jsou algebraické doplňky odpovídajících si prvků k -tých řádků obou matic stejné:

$$\tilde{b}_{kj} = (-1)^{k+j} |\mathbf{B}_{kj}| = (-1)^{k+j} |\mathbf{A}_{kj}| = \tilde{a}_{kj}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. II

Z tohoto důvodu jsou algebraické doplňky odpovídajících si prvků k -tých řádků obou matic stejné:

$$\tilde{b}_{kj} = (-1)^{k+j} |\mathbf{B}_{kj}| = (-1)^{k+j} |\mathbf{A}_{kj}| = \tilde{a}_{kj}.$$

Rozvineme-li determinant matice \mathbf{B} podle jejího k -tého řádku, dostaneme

$$\det \mathbf{B} = \sum_{j=1}^n b_{kj} \tilde{b}_{kj} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{kj} = 0.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice \mathbf{A} podle k -tého řádku dává

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{kj} = \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k(\tilde{\mathbf{A}})^T$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice \mathbf{A} podle k -tého řádku dává

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{kj} &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k(\tilde{\mathbf{A}})^T \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{A}}^T) = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{pro } i = k, \end{cases}\end{aligned}$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. III

Spojení této rovnosti s Laplaceovým rozvojem determinantu matice \mathbf{A} podle k -tého řádku dává

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{kj} &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{r}_k(\tilde{\mathbf{A}})^T \\ &= \mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{s}_k(\tilde{\mathbf{A}}^T) = \begin{cases} |\mathbf{A}|, & \text{pro } i = k, \\ 0, & \text{pro } i \neq k. \end{cases}\end{aligned}$$

Jinak řečeno,

$$\mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{A}}^T = |\mathbf{A}| \mathbf{I}_n.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. IV

Inverzní matici k regulární čtvercové matici \mathbf{A} potom dostaneme tak, že transponovanou matici jejich algebraických doplňků vydělíme determinantem $|\mathbf{A}|$.

Inverzní matice a Cramerovo prav. IV

Inverzní matici k regulární čtvercové matici \mathbf{A} potom dostaneme tak, že transponovanou matici jejich algebraických doplňků vydělíme determinantem $|\mathbf{A}|$.

Věta

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární matice. Potom

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \tilde{\mathbf{A}}^T.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. V

Příklad

Najděme inverzní matici k reálné matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. V

Příklad

Najděme inverzní matici k reálné matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Její determinant a matici algebraických doplňků vypočteme snadno:

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot (-3) - 5 \cdot (-2) = 7, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. VI

Proto

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice a Cramerovo prav. VII

Věta

(Cramerovo pravidlo)

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in K^n$ a pro $1 \leq j \leq n$ nechť $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ označuje matici, která vznikne z matice \mathbf{A} nahrazením jejího j -tého sloupce sloupcovým vektorem \mathbf{b} .

Inverzní matice a Cramerovo prav. VII

Věta

(Cramerovo pravidlo)

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in K^n$ a pro $1 \leq j \leq n$ nechť $\mathbf{A}_j^{\mathbf{b}}$ označuje matici, která vznikne z matice \mathbf{A} nahrazením jejího j -tého sloupce sloupcovým vektorem \mathbf{b} .

Potom soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné řešení

$$\mathbf{x} = \left(\frac{|\mathbf{A}_1^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \frac{|\mathbf{A}_2^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|}, \dots, \frac{|\mathbf{A}_n^{\mathbf{b}}|}{|\mathbf{A}|} \right)^T.$$