

7. HODNOST MATICE, INVERZNÍ MATICE A ZMĚNA BÁZE

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

2. listopadu 2006

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem ***inverzní matice*** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem **inverzní matice** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem **inverzní matice** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem **inverzní matice** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem **hodnosti matice**, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.

Abstrakt přednášky

V této kapitole zavedeme pojem **inverzní matice** k dané čtvercové matici a dáme jej do souvislosti s pojmem inverzního lineárního zobrazení.

Dále se naučíme počítat inverzní matice a matice přechodu z jedné souřadné báze do druhé.

Nakonec prozkoumáme vliv změny báze na matici lineárního zobrazení.

Přednáška začne pojmem **hodnosti matice**, který nám umožní rozhodnout o existenci inverzní matice.

V celé kapitole K označuje pevné těleso, m, n, p jsou kladná celá čísla.

Obsah přednášky

Hodnost matice, inverzní matice a změna báze

Hodnost matice

Inverzní matice a inverzní lineární zobrazení

Realizace ERO a ESO pomocí násobení matic

Výpočet inverzní matice

Matice přechodu

Matice lineárního zobrazení vzhledem na různé báze

Hodnost matice I

V této části je potřebné rozlišovat mezi vektorovými prostory řádkových resp. sloupcových vektorů. Prostor řádkových vektorů budeme značit $K^{1 \times n}$ a prostor sloupcových vektorů $K^{n \times 1}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1 \times n}$ označuje i -tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m \times 1}$ j -tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

Hodnost matice II

$\mathbf{r}_i(\mathbf{A}) \in K^{1 \times n}$ označuje i -tý řádek a $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) \in K^{m \times 1}$ j -tý sloupec matice $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$.

Tuto matici můžeme zapsat blokově jako

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{r}_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})).$$

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1 \times n}$ generovaného řádky matice \mathbf{A} .

Hodnost matice III

Řádkovou hodnotí $h_r(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1 \times n}$ generovaného řádky matice \mathbf{A} .

Podobně, **sloupcovou hodnotí** $h_s(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m \times 1}$ generovaného sloupci matice \mathbf{A} .

Hodnost matice III

Řádkovou hodností $h_r(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{1 \times n}$ generovaného řádky matice \mathbf{A} .

Podobně, **sloupcovou hodností** $h_s(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} nazýváme dimenzi lineárního podprostoru vektorového prostoru $K^{m \times 1}$ generovaného sloupci matice \mathbf{A} .

Tedy

$$\begin{aligned}h_r(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})], \\h_s(\mathbf{A}) &= \dim[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})].\end{aligned}$$

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim \text{Im} \varphi$.

Hodnost matice IV

Označme $\varphi : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ lineární zobrazení dané předpisem $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$ pro $\mathbf{x} \in K^{n \times 1}$.

Hodností lineárního zobrazení φ nazýváme dimenzi jeho obrazu, t. j. $h(\varphi) = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Zřejmě platí $h(\varphi) = h_s(\mathbf{A})$, protože lineární podprostor $\operatorname{Im} \varphi \subseteq K^{m \times 1}$ je generovaný sloupci matice \mathbf{A} .

Hodnost matice V

Lemma

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Hodnost matice V

Lemma

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) Necht' matice \mathbf{B} vznikne z matice \mathbf{A} provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak

$$[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})].$$

Hodnost matice V

Lemma

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

(a) Necht' matice \mathbf{B} vznikne z matice \mathbf{A} provedením jedné elementární řádkové operace (ERO). Pak

$$[\mathbf{r}_1(\mathbf{A}), \mathbf{r}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{A})] = [\mathbf{r}_1(\mathbf{B}), \mathbf{r}_2(\mathbf{B}), \dots, \mathbf{r}_m(\mathbf{B})].$$

(b) Necht' matice \mathbf{C} vznikne z matice \mathbf{A} vykonáním jedné elementární sloupcové operace (ESO). Pak

$$[\mathbf{s}_1(\mathbf{A}), \mathbf{s}_2(\mathbf{A}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{A})] = [\mathbf{s}_1(\mathbf{C}), \mathbf{s}_2(\mathbf{C}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{C})].$$

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice \mathbf{A}*** .

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat ***hodností matice \mathbf{A}*** .

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Hodnost matice VI

Tvrzení

Pro každou matici $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ platí $h_r(\mathbf{A}) = h_s(\mathbf{A})$.

Společnou hodnotu řádkové a sloupcové hodnosti budeme nyní značit $h(\mathbf{A})$ a nazývat **hodností matice \mathbf{A}** .

Zřejmě pro $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je $h(\mathbf{A}) \leq \min(m, n)$.

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$. Potom $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^T)$.

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$;

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Potom

- (a) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$;*
- (b) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = K^{m \times 1}$ právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = m$.*

Hodnost matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in K^{m \times 1}$ jsou libovolné vektory a $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$ je matice taková, že $\mathbf{s}_j(\mathbf{A}) = \mathbf{u}_j$ pro $1 \leq j \leq n$.

Potom

(a) $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$;

(b) $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = K^{m \times 1}$ právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = m$.

Případ (a) může nastat tehdy, když $n \leq m$; naopak, (b) může nastat jedině za předpokladu $m \leq n$.

Hodnost matice VIII

Tvrzení

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. Potom

Hodnost matice VIII

Tvrzení

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in K^{n \times p}$. Potom

$$h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \leq \min(h(\mathbf{A}), h(\mathbf{B})).$$

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. \mathbf{A} je **čtvercová** matice typu $n \times n$.

Inverzní maticí k matici \mathbf{A} rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. \mathbf{A} je **čtvercová** matice typu $n \times n$.

Inverzní maticí k matici \mathbf{A} rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici \mathbf{A} existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Inverzní matice I

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, t. j. \mathbf{A} je **čtvercová** matice typu $n \times n$.
Inverzní maticí k matici \mathbf{A} rozumíme matici $\mathbf{B} \in K^{n \times n}$ tak, že

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

Zřejmě k dané čtvercové matici \mathbf{A} existuje nanejvýš jedna inverzní matice.

Tuto jednoznačně určenou matici (pokud existuje) budeme značit \mathbf{A}^{-1} .

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále α, β jsou nějaké báze v U , resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na báze β, α .

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále α, β jsou nějaké báze v U , resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na báze β, α .

Potom k matici \mathbf{A} existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1} .

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále α, β jsou nějaké báze v U , resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na báze β, α .

Potom k matici \mathbf{A} existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1} .

V tomto případě \mathbf{A}^{-1} je maticí lineárního zobrazení $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ vzhledem na báze α, β , t. j.

Inverzní matice II

Věta

Nechť U, V jsou vektorové prostory nad tělesem K a $\dim U = \dim V = n$.

Nechť dále α, β jsou nějaké báze v U , resp. ve V a $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na báze β, α .

Potom k matici \mathbf{A} existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} právě tehdy, když k zobrazení φ existuje inverzní zobrazení φ^{-1} .

V tomto případě \mathbf{A}^{-1} je maticí lineárního zobrazení $\varphi^{-1} : U \rightarrow V$ vzhledem na báze α, β , t. j.

$$\mathbf{A}^{-1} = ((\varphi)_{\alpha, \beta})^{-1} = (\varphi^{-1})_{\beta, \alpha}.$$

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je **regulární**, pokud k ní existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} ; v opačném případě \mathbf{A} je **singulární**.

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je **regulární**, pokud k ní existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} ; v opačném případě \mathbf{A} je **singulární**.

Věta

Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Inverzní matice III

Říkáme, že čtvercová matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je **regulární**, pokud k ní existuje inverzní matice \mathbf{A}^{-1} ; v opačném případě \mathbf{A} je **singulární**.

Věta

Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když $h(\mathbf{A}) = n$.

Věta

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ právě tehdy, když $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou regulární matice.

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou regulární matice.

Potom i matice \mathbf{A}^{-1} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a \mathbf{A}^T jsou regulární a platí:

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou regulární matice.

Potom i matice \mathbf{A}^{-1} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a \mathbf{A}^T jsou regulární a platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A},$$

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou regulární matice.

Potom i matice \mathbf{A}^{-1} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a \mathbf{A}^T jsou regulární a platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

Inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{n \times n}$ jsou regulární matice.

Potom i matice \mathbf{A}^{-1} , $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a \mathbf{A}^T jsou regulární a platí:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1},$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T.$$

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Necht' $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

- (a) Necht' $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ vznikne z \mathbf{A} provedením jedné ERO. Označme \mathbf{E} matici, která vznikne z matice \mathbf{I}_m provedením stejné ERO. Potom $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.*

Realizace ERO a ESO I

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$.

- (a) Necht' $\mathbf{B} \in K^{m \times n}$ vznikne z \mathbf{A} provedením jedné ERO. Označme \mathbf{E} matici, která vznikne z matice \mathbf{I}_m provedením stejné ERO. Potom $\mathbf{B} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$.*
- (b) Necht' $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ vznikne z \mathbf{A} provedením jedné ESO. Označme \mathbf{F} matici, která vznikne z matice \mathbf{I}_n provedením stejné ESO. Potom $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}$.*

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice \mathbf{I}_n provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Realizace ERO a ESO II

Čtvercové matice $\mathbf{E} \in K^{n \times n}$, které vzniknou z jednotkové matice \mathbf{I}_n provedením jediné ERO nebo ESO, nazýváme ***elementární matice***.

Libovolnou ERO (ESO) na matici \mathbf{A} můžeme realizovat vynásobením matice \mathbf{A} vhodnou elementární maticí \mathbf{E} (F) zleva (zprava).

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}).$$

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení

Necht' $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$ jsou elementární matice tak, že $\mathbf{E}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Výpočet inverzní matice I

Návod na výpočet inverzní matice k dané čtvercové matici $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$:

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I}_n) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1}).$$

Tvrzení

Necht' $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ a $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$ jsou elementární matice tak, že $\mathbf{E}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$.

Potom $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}_k \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_1$.

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ESO}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Výpočet inverzní matice II

K stejnému cíli vede též postup reprezentovaný schématem:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_n \end{array} \right) \xrightarrow{\text{ESO}} \left(\begin{array}{c} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right).$$

Tvrzení

Matice $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ je regulární právě tehdy, když ji můžeme rozložit na součin $\mathbf{A} = \mathbf{E}_1 \cdot \dots \cdot \mathbf{E}_k$ konečného počtu elementárních matic $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k \in K^{n \times n}$.

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ platí:

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ platí:

- (a) \mathbf{A} je řádkově ekvivalentní s \mathbf{B} právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$;

Výpočet inverzní matice III

Tvrzení

Pro libovolné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ platí:

- (a) \mathbf{A} je řádkově ekvivalentní s \mathbf{B} právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}$;
- (b) \mathbf{A} je sloupcově ekvivalentní s \mathbf{B} právě tehdy, když existuje regulární matice $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}$.

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$, přičemž \mathbf{P} , \mathbf{Q} jsou regulární matice.

Výpočet inverzní matice IV

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{m \times n}$, $\mathbf{P} \in K^{m \times m}$, $\mathbf{Q} \in K^{n \times n}$, přičemž \mathbf{P} , \mathbf{Q} jsou regulární matice.

Potom

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A}) = h(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}) = h(\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}).$$

Výpočet inverzní matice V

**Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí A^{-1}
(pokud existuje) zleva resp. zprava**

Výpočet inverzní matice V

**Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí A^{-1}
(pokud existuje) zleva resp. zprava**

Bud' $A \in K^{n \times n}$ regulární a $B \in K^{n \times m}$, $C \in K^{m \times n}$ libovolné.

Výpočet inverzní matice V

**Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí \mathbf{A}^{-1}
(pokud existuje) zleva resp. zprava**

Bud' $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ libovolné.

Pak

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

Výpočet inverzní matice V

**Násobení libovolné matice vhodného rozměru maticí \mathbf{A}^{-1}
(pokud existuje) zleva resp. zprava**

Bud' $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ regulární a $\mathbf{B} \in K^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in K^{m \times n}$ libovolné.

Pak

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{B}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B})$$

a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ESO}} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \mid \mathbf{c}),$$

Výpočet inverzní matice VI

Řešení soustavy lineárních rovnic

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{B} \mid \mathbf{c}),$$

které má pro regulární $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$ tvar

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n \mid \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}).$$

Výpočet inverzní matice VII

Tvrzení

Nechť $\mathbf{A} \in K^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in K^n$. Je-li \mathbf{A} regulární, tak soustava $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ má jediné řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$.

Maticе přechodu I

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem K a $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou jeho dvě báze.

Maticí přechodu z báze β do báze α nazýváme matici identického zobrazení $\text{id}_V : V \rightarrow V$ vzhledem na bázi β , α , kterou značíme $\mathbf{P}_{\alpha, \beta}$. Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha, \beta} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}.$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

t.j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

t.j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = ((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha),$$

Matice přechodu II

Sloupce matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ jsou tvořeny souřadnicemi vektorů báze β vzhledem na bázi α ,

t.j. $\mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = (\mathbf{v}_j)_\alpha$ pro $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} = ((\mathbf{v}_1)_\alpha, (\mathbf{v}_2)_\alpha, \dots, (\mathbf{v}_n)_\alpha),$$

a tato matice je jednoznačně určena podmínkou transformace souřadnic

$$(\mathbf{x})_\alpha = \mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot (\mathbf{x})_\beta$$

pro libovolné $\mathbf{x} \in V$.

Maticе přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za \mathbf{x} postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázi β , s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

Matrice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za \mathbf{x} postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázi β , s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Matice přechodu III

Pokud do rovnosti $\mathbf{x} = \alpha \cdot (\mathbf{x})_\alpha$ budeme za \mathbf{x} postupně dosazovat vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ bázi β , s využitím vztahu pro sloupce součinu matic dostaneme

$$\mathbf{v}_j = \alpha \cdot (\mathbf{v}_j)_\alpha = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}_{\alpha,\beta}) = \mathbf{s}_j(\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta})$$

pro každé $1 \leq j \leq n$.

Tedy

$$\alpha \cdot \mathbf{P}_{\alpha,\beta} = \beta.$$

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\mathbf{P} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}$, t. j. \mathbf{P} je matice přechodu z báze β do báze α ;*

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\mathbf{P} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}$, t. j. \mathbf{P} je matice přechodu z báze β do báze α ;*
- (ii) $(\mathbf{x})_{\alpha} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;*

Matice přechodu IV

Tvrzení

Nechť α, β jsou báze n -rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom pro libovolnou matici $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\mathbf{P} = (\text{id}_V)_{\alpha, \beta}$, t. j. \mathbf{P} je matice přechodu z báze β do báze α ;*
- (ii) $(\mathbf{x})_{\alpha} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x})_{\beta}$ pro každé $\mathbf{x} \in V$;*
- (iii) $\alpha \cdot \mathbf{P} = \beta$.*

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha, \alpha} = \mathbf{I}_n,$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha, \alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta, \alpha} = \mathbf{P}_{\alpha, \beta}^{-1},$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Matice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy **regulární**.

Matrice přechodu V

Tvrzení

Nechť α, β, γ jsou báze konečně rozměrného vektorového prostoru V nad tělesem K .

Potom

$$\mathbf{P}_{\alpha,\alpha} = \mathbf{I}_n,$$

$$\mathbf{P}_{\beta,\alpha} = \mathbf{P}_{\alpha,\beta}^{-1},$$

$$\mathbf{P}_{\alpha,\beta} \cdot \mathbf{P}_{\beta,\gamma} = \mathbf{P}_{\alpha,\gamma}.$$

Z druhé z uvedených podmínek vidíme, že matice přechodu $\mathbf{P}_{\alpha,\beta}$ je vždy **regulární**.

Naopak, každá regulární matice $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je maticí přechodu mezi vhodnou dvojicí bazí.

Matrice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Matrice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P},$$

Matrice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Matrice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom \mathbf{P} je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ ,

Matrice přechodu VI

Tvrzení

Nechť V je n -rozměrný vektorový prostor nad K a $\mathbf{P} \in K^{n \times n}$ je libovolná regulární matice.

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ je nějaká báze ve V . Položme $\mathbf{v}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P})$, $\mathbf{w}_j = \alpha \cdot \mathbf{s}_j(\mathbf{P}^{-1})$ pro $1 \leq j \leq n$, a dále

$$\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}, \quad \gamma = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n) = \alpha \cdot \mathbf{P}^{-1}.$$

Potom \mathbf{P} je maticí přechodu z báze β do báze α a zároveň z báze α do báze γ , t. j.

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \mathbf{P}_{\gamma, \alpha}.$$

Matrice přechodu VII

Speciálně, \mathbf{P} je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \text{ v } K^n$

Matrice přechodu VII

Speciálně, \mathbf{P} je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \text{ v } K^n$

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Matrice přechodu VII

Speciálně, \mathbf{P} je maticí přechodu z báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}))$ do báze $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \text{ v } K^n$

a taktéž z báze ε do báze $(\mathbf{s}_1(\mathbf{P}^{-1}), \dots, \mathbf{s}_n(\mathbf{P}^{-1}))$.

Tvrzení

Nechť $\alpha = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ jsou dvě báze sloupcového vektorového prostoru K^n . Potom $\mathbf{P}_{\alpha, \beta} = \alpha^{-1} \cdot \beta$.

Matice přechodu VIII

**Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β
vektorového prostoru K^n**

Matice přechodu VIII

**Návod na výpočet matice přechodu pro báze α, β
vektorového prostoru K^n**

$$(\alpha | \beta) \xrightarrow{\text{ERO}} (\mathbf{I}_n | \mathbf{P}_{\alpha, \beta}) = (\varepsilon | \alpha^{-1} \cdot \beta).$$

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2 .

Matice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2 .

Matrice LZ vzhledem na různé báze I

Věta

Nechť V_1, V_2 jsou konečně rozměrné vektorové prostory nad tělesem K , $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ je lineární zobrazení, α_1, β_1 jsou dvě báze prostoru V_1 a α_2, β_2 jsou dvě báze prostoru V_2 .

Potom

$$(\varphi)_{\beta_2, \beta_1} = \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \cdot (\varphi)_{\alpha_2, \alpha_1} \cdot \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1}.$$

Matrice LZ vzhledem na různé báze II

Výše uvedenou transformační formuli si můžeme zapamatovat pomocí následujícího diagramu:

$$\begin{array}{ccc} (V_1, \alpha_1) & \xrightarrow{\mathbf{A}} & (V_2, \alpha_2) \\ \uparrow \mathbf{P}_{\alpha_1, \beta_1} & & \downarrow \mathbf{P}_{\beta_2, \alpha_2} \\ (V_1, \beta_1) & \xrightarrow{\mathbf{B}} & (V_2, \beta_2) \end{array}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\epsilon^{(m)}, \epsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\epsilon^{(n)}, \epsilon^{(m)}$.

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\alpha, \varepsilon^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(n)}, \beta}$$

Maticе LZ vzhledem na různé báze III

Příklad

Nechť $\varphi : K^n \rightarrow K^m$ je lineární zobrazení a α, β jsou nějaké báze prostorů K^m resp. K^n .

Označme $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$, $\mathbf{M} = (\varphi)_{\varepsilon^{(m)}, \varepsilon^{(n)}}$ matice zobrazení φ vzhledem k bazím β, α resp. vzhledem ke kanonickým bazím $\varepsilon^{(n)}, \varepsilon^{(m)}$.

Pak platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{\alpha, \varepsilon^{(m)}} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}_{\varepsilon^{(n)}, \beta}$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_{\varepsilon^{(m)}, \alpha} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{\beta, \varepsilon^{(n)}}$$

Matice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

Matrice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\beta},$$

Matrice LZ vzhledem na různé báze III

Pokud ztotožníme každou bázi s regulární maticí, jejíž sloupce jsou vektory této báze, tak výše uvedené rovnosti získají tvar

$$\mathbf{A} = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I}_n^{-1} \cdot \beta = \alpha^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \beta,$$

a

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}_m^{-1} \cdot \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1} \cdot \mathbf{I}_n = \alpha \cdot \mathbf{A} \cdot \beta^{-1}.$$

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V ;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V ;*
- (ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}, \mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*

Matice LZ vzhledem na různé báze IV

Věta

Nechť U je m -rozměrný a V je n -rozměrný vektorový prostor nad tělesem K .

Potom pro libovolné matice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in K^{m \times n}$ jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou matice stejného lineárního zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ vzhledem na nějaké dvě dvojice bazí prostorů U, V ;*
- (ii) existují regulární matice $\mathbf{P} \in K^{m \times m}, \mathbf{Q} \in K^{n \times n}$ tak, že $\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$;*
- (iii) $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{B})$.*

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že

Matice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že φ má vzhledem k bazím β, α matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h, n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h, h} & \mathbf{0}_{m-h, n-h} \end{pmatrix},$$

Matrice LZ vzhledem na různé báze V

Věta

Pro každé lineární zobrazení $\varphi : V \rightarrow U$ mezi konečně rozměrnými vektorovými prostory nad tělesem K můžeme zvolit bázi β prostoru V a bázi α prostoru U tak, že φ má vzhledem k bazím β, α matici v blokovém tvaru

$$(\varphi)_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_h & \mathbf{0}_{h, n-h} \\ \mathbf{0}_{m-h, h} & \mathbf{0}_{m-h, n-h} \end{pmatrix},$$

kde $n = \dim V$, $m = \dim U$ a $h = h(\varphi)$.