

# LINEÁRNÍ PODPROSTORY a LINEÁRNÍ NEZÁVISLOST

Jan Paseka

Masarykova Univerzita Brno

3. října 2006

# Abstrakt přednášky

## Abstrakt

V této kapitole se vrátíme ke studiu abstraktních vektorových prostorů nad obecným tělesem.  $K$  tedy bude v celé kapitole označovat nějaké pevné, jinak libovolné těleso a  $V$  bude pevně zvolený vektorový prostor nad  $K$ .

# Obsah přednášky

- ▶ Lineární prostory
  - ▶ Lineární podprostory
  - ▶ Lineární obal množiny vektorů
  - ▶ Průnik a součet lineárních podprostorů
  - ▶ Lineární nezávislost
  - ▶ Lineární obal v prostorech  $K^m$
  - ▶ Lineárně nezávislé posloupnosti

# Lineární podprostory I

Množina  $S \subseteq V$  se nazývá **lineární (vektorový) podprostor** vektorového prostoru  $V$ , pokud  $S \neq \emptyset$  a pro všechny skaláry  $a \in K$  a vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$  platí  $a\mathbf{x} \in S$  a  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$ .

## Lineární podprostory II

Jinak řečeno, neprázdná podmnožina  $S \subseteq V$  je lineární podprostor právě tehdy, když je uzavřená na operace skalárního násobku a součtu vektorů.

### Tvrzení

*Nechť  $S$  je lineární podprostor vektorového prostoru  $V$ . Pak  $\mathbf{0} \in S$  a  $S$  s operacemi součtu vektorů a skalárního násobku zúženými z  $V$  na  $S$  tvoří vektorový prostor nad (číselným) tělesem  $K$ .*

## Lineární podprostory III

V každém vektorovém prostoru  $V$  jsou  $\{0\}$  a  $V$  lineární podprostory (v případě, když  $V = \{0\}$ , dokonce splývají, v opačném případě jde o dva různé podprostory) –  $\{0\}$  nazýváme **triviální** nebo též **nulový** a  $V$  **nevlastní** alebo též **plný** lineární podprostor.

Tedy pro **vlastní netriviální** lineární podprostor  $S \subseteq V$  platí  $\{0\} \neq S \neq V$ .

## Lineární podprostory IV

Např. ve vektorovém prostoru  $\mathbb{R}^3$  netriviální vlastní podprostory jsou právě všechny přímky a roviny procházející počátkem  $\mathbf{0}$ .

To si můžeme graficky vyjádřit pomocí následujícího obrázku, který samozřejmě ukáže pouze několik z nekonečně mnoha lineárních podprostorů.

Lineární podprostory jsou popsány pomocí minimálního počtu generátorů.

# Lineární podprostory V

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \dots$$

$$\left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \dots$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Následující tvrzení charakterizuje lineární podprostory jako množiny uzavřené na lineární kombinace.



# Lineární podprostory VI

## Tvrzení

Pro libovolnou podmnožinu  $S$  vektorového prostoru  $V$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i)  $S$  je lineární podprostor ve  $V$ ;
- (ii)  $S \neq \emptyset$  a pro všechny skaláry  $a, b \in K$  a vektory  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$  platí  $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in S$ ;
- (iii) pro každé  $n \in \mathbb{N}$  a pro všechny skaláry  $a_1, \dots, a_n \in K$  a vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in S$  platí

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n \in S.$$

## Lineární podprostory VII

### Příklad

(a) Označme  $K^{(X)}$  množinu všech funkcí  $f : X \rightarrow K$  takových, že množina  $\{x \in X; f(x) \neq 0\}$  je konečná. Pro libovolnou lineární kombinaci funkcí  $f, g \in K^{(X)}$  platí

$$\begin{aligned} \{x \in X; af(x) + bg(x) \neq 0\} \subseteq \\ \{x \in X; f(x) \neq 0\} \cup \{x \in X; g(x) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že  $K^{(X)}$  je lineární podprostor vektorového prostoru  $K^X$ . Je-li  $X$  je konečná, tak  $K^{(X)} = K^X$ , je-li  $X$  je nekonečná, tak  $K^{(X)}$  je netriviální vlastní podprostor v  $K^X$ .

## Lineární podprostory VIII

(b) Necht'  $X \subseteq \mathbb{R}$  je libovolná množina reálných čísel. Potom  $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ , nebo jen stručně  $\mathcal{C}(X)$  označuje **množinu všech spojitých funkcí**  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Protože lineární kombinace spojitých funkcí je zřejmě opět spojitá funkce,  $\mathcal{C}(X)$  je lineární podprostor v  $\mathbb{R}^X$ .

# Lineární obal I

Množinu všech lineárních kombinací vektorů z podmnožiny  $X$  vektorového prostoru  $V$  nazýváme **lineárním obalem** množiny  $X$  a označujeme ji  $[X]$ .

Tedy

$$[X] = \{ a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n; n \in \mathbb{N} \\ \& a_1, \dots, a_n \in K \& \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in X \}.$$

## Lineární obal II

Je-li  $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  konečná množina, tak místo  $[\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}]$  píšeme jen  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Zřejmě tento zápis má smysl i pro libovolnou uspořádanou  $n$ -tici (ne nutně různých) vektorů  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ , a platí

$$[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] = \{a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n; a_1, \dots, a_n \in K\}.$$

## Lineární obal III

### Tvrzení

*Nechť  $X$  je podmnožina vektorového priestoru  $V$ . Potom lineární obal  $[X]$  množiny  $X$  je nejmenší lineární podprostor vektorového priestoru  $V$  takový, že  $X \subseteq [X]$ .*

Dokázané tvrzení nás opravňuje nazývať lineární obal  $[X]$  množiny  $X \subseteq V$  též lineárním podprostorem **generovaným** množinou  $X$ .

## Lineární obal IV

Pokud  $[X] = S$ , říkáme, že  $X$  **generuje** lineární podprostor  $S$ , případně, že  $X$  je **generující množina** nebo též **množina generátorů** lineárního podprostoru  $S \subseteq V$ .

Je-li  $S = V$ , t. j. je-li  $[X] = V$ , mluvíme o **generující množině**. Používá se též název **vytvářející či vytvořující množina**.

Kvůli přehlednosti ještě shrneme základní vlastnosti operace lineárního obalu  $X \mapsto [X]$ .

# Lineární obal $V$

## Tvrzení

*Pro libovolné podmnožiny  $X, Y$  vektorového prostoru  $V$  a  $\mathbf{v} \in V$  platí:*

(a)  $[\emptyset] = [\mathbf{0}] = \{\mathbf{0}\};$       (b)  $X \subseteq [X];$

(c)  $X \subseteq Y \Rightarrow [X] \subseteq [Y];$

(d)  $X$  je lineární podprostor ve  $V$  právě tehdy, když  $X = [X];$

(e)  $[[X]] = [X];$

(f)  $\mathbf{v} \in [X] \Leftrightarrow [X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X].$



# Součet I

Nechť  $X$ ,  $Y$  jsou libovolné podmnožiny vektorového prostoru  $V$ .

Potom množinu

$$X + Y = \{\mathbf{x} + \mathbf{y}; \mathbf{x} \in X \ \& \ \mathbf{y} \in Y\}$$

nazýváme *součtem* množin  $X$ ,  $Y$ .

## Tvrzení

*Nechť  $S, T$  jsou lineární podprostory vektorového prostoru  $V$ .*

*Potom i  $S \cap T$  a  $S + T$  jsou lineární podprostory ve  $V$ . Navíc platí*

$$S + T = [S \cup T],$$

*t.j.  $S + T$  je nejmenší lineární podprostor ve  $V$ , který obsahuje  $S$  i  $T$ .*

***Sjednocení dvou lineárních podprostorů  $S, T$  vektorového prostoru  $V$  nemusí být lineárním podprostorem.***

## Součet III

Přesněji,  $S \cup T$  je lineární podprostor ve  $V$  právě tehdy, když  $S \subseteq T$  nebo  $T \subseteq S$ .

Součet lineárních podprostorů  $S, T$  vektorového prostoru  $V$  nazýváme **přímý** nebo též **direktní součet**, pokud  $S \cap T = \{0\}$ ; píšeme pak  $S \oplus T$ .

# Součet IV

## Tvrzení

*Nechť  $S, T$  jsou lineární podprostory vektorového prostoru  $V$ .*

*Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$ , t.j. součet  $S + T$  je direktní;*
- (ii) každý vektor  $\mathbf{z} \in S + T$  má jednoznačné vyjádření ve tvaru  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , kde  $\mathbf{x} \in S, \mathbf{y} \in T$ .*

# Závislost I

Nechť  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$ .

Říkáme, že uspořádaná  $n$ -tice vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  je **lineárně závislá**, pokud existují skaláry  $c_1, \dots, c_n \in K$  tak, že  $(c_1, \dots, c_n) \neq \mathbf{0}$  a  $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$ .

V opačném případě říkáme, že uspořádaná  $n$ -tice vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  je **lineárně nezávislá**.

## Závislost II

Pro  $n = 0$  kvůli úplnosti dodávame, že uspořádanou 0-tici (t. j. *prázdnou posloupnost*) vektorů považujeme za lineárně nezávislou.

Místo o "lineárně (ne)závislé uspořádané  $n$ -tici vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ " budeme často mluvit jen o lineárně (ne)závislých vektorech  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ .

## Závislost III

Podle definice lineární nezávislosti jsou vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  lineárně nezávislé právě tehdy, když

$$\begin{aligned} & (\forall c_1, \dots, c_n \in K) \\ & (c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_1 = \dots = c_n = 0). \end{aligned}$$

Pro  $n$ -tici skalárů  $(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$  platí

$$c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

*pro libovolnou*  $n$ -tici vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ , bez ohledu na to, zda je lineárně závislá nebo nezávislá.

## Závislost IV

Pro některé  $n$ -tice vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  můžeme jako výsledek lineární kombinace  $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$  dostat  $\mathbf{0}$  i s pomocí *jiné*  $n$ -tice skalárů  $(c_1, \dots, c_n)$  než jen  $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$  – takovéto uspořádané  $n$ -tice  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  nazýváme *lineárně závislé*.

Pro některé uspořádané  $n$ -tice vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  je volba  $(c_1, \dots, c_n) = \mathbf{0}$  *jediná možnost* jak pomocí lineární kombinace  $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$  získáme výsledek  $\mathbf{0}$  – takovéto  $n$ -tice nazýváme *lineárně nezávislé*.



# Závislost V

Platí čtyři jednoduchá pozorování:

- (a) jediný vektor  $\mathbf{u}$  je lineárně nezávislý právě tehdy, když  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ;
- (b) vektory  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je násobkem druhého;
- (c) je-li některý z vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  roven  $\mathbf{0}$ , pak jsou tyto vektory lineárně závislé;
- (d) pokud se některé dva z vektorů  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  rovnají, pak jsou tyto vektory lineárně závislé.

## Závislost VI

Jinak řečeno, pouze uspořádaná  $n$ -tice nenulových a navzájem různých vektorů, z kterých žádný není násobkem druhého, může (ale stále ještě nemusí) být lineárně nezávislá.

Následující tabulka shrnuje vztah lineární závislosti vzhledem k relaci inkluze.

	$S_1 \subseteq S$	$S_1 \supseteq S$
$S$ nezávislá	$S_1$ bude nezávislá	$S_1$ může být oboje
$S$ závislá	$S_1$ může být oboje	$S_1$ bude závislá

# Závislost VII

## Tvrzení

Pre libovolné  $n \in \mathbb{N}$  a  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in V$  jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně závislé;
- (ii) některý z vektorů  $\mathbf{u}_k$ ,  $k \leq n$ , je lineární kombinací předcházejících;
- (ii') některý z vektorů  $\mathbf{u}_k$ ,  $k \leq n$ , je lineární kombinací následujících;
- (iii) některý z vektorů  $\mathbf{u}_k$ ,  $k \leq n$ , je lineární kombinace ostatních.

## Závislost VIII

Každý vektor  $\mathbf{x}$  z lineárního obalu  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$$

pro nějakou  $n$ -tici skalárů  $(c_1, \dots, c_n)$ .

### Tvrzení

*Vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když každý vektor  $\mathbf{x} \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$  můžeme vyjádřit ve tvaru*

*$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_n\mathbf{u}_n$  pro jedinou uspořádanou  $n$ -tici  $(c_1, \dots, c_n) \in K^n$ .*

## Závislost IX

Následující tvrzení dává do souvislosti lineární (ne)závislost s lineárním obalom.

### Tvrzení

*Nechť  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v} \in V$ , přičemž vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně nezávislé. Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\mathbf{v} \in [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ ;*
- (ii) vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}$  jsou lineárně závislé;*
- (iii)  $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}] = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ .*

# Závislost X

## Věta

*Nechť  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in V$ , přičemž vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  jsou lineárně nezávislé. Potom z množiny  $\{1, \dots, m\}$  můžeme vybrat indexy  $i_1 < \dots < i_k$  tak, že vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_k}$  jsou lineárně nezávislé a generují stejný podprostor jako vektory  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ .*

## Lineární obal v $K^m$ I

Použití téže metody úpravy matic pomocí ERO na (redukovaný) stupňovitý tvar na řešení následujících tří otázek:

- (1) rozhodnout pro dané vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$  zda  $\mathbf{y}$  patří nebo nepatří do lineárního obalu  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ ;

## Lineární obal v $K^m$ II

- (2) rozhodnout pro dané vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in K^m$  zda jsou lineárně závislé nebo nezávislé;
- (3) vybrat z vektorů  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in K^m$  lineárně nezávislé vektory  $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$  ( $j_1 < \dots < j_k$ ) tak, aby vektory  $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$  generovaly ve  $V$  stejný lineární podprostor jako vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .

Zavedeme dále označení, kterého sa budeme držet v celém odstavci.



## Lineární obal v $K^m$ III

Nechť  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y} \in K^m$  jsou sloupcové vektory, přičemž

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{mj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Označme  $\mathbf{X} = (x_{ij}) \in K^{m \times n}$  matici se sloupci  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ , a  $(\mathbf{X} | \mathbf{y}) \in K^{m \times (n+1)}$  blokovou matici složenou z matice  $\mathbf{X}$  a vektoru  $\mathbf{y}$ .

## Lineární obal v $K^m$ IV

Potom pro  $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$  platí:

$$(1) \quad c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y};$$

$$(2) \quad c_1 \mathbf{x}_1 + \dots + c_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Jinak řečeno:

- (1)  $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$  právě tehdy, když soustava  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$  s rozšířenou maticí  $(\mathbf{X} | \mathbf{y})$  má alespoň jedno řešení;

## Lineární obal v $K^m$ $V$

- (2) vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když homogenní soustava  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$  má jediné řešení  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ; pokud tato soustava má i nějaké nenulové řešení, tak vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  jsou lineárně závislé.

Otázku (1) umíme řešit. Stačí pomocí ERO upravit matici  $(\mathbf{X} | \mathbf{y})$  na stupňovitý tvar. Pokud výsledná matice obsahuje řádek tvaru  $(0, \dots, 0 | z)$ , kde  $z \neq 0$ , tak soustava  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}$  nemá řešení a  $\mathbf{y} \notin [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

## Lineární obal v $K^m$ VI

Pokud sa takovýto riádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a  $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici  $\mathbf{X}$  na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry,  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  je jediným řešením soustavy  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$  a vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  jsou lineárně nezávislé.

## Lineární obal v $K^m$ VI

Pokud sa takovýto riádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a  $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici  $\mathbf{X}$  na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

## Lineární obal v $K^m$ VI

Pokud sa takovýto riádek ve výsledné matici nenachází, tak soustava má alespoň jedno řešení a  $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

Podobně je tomu s otázkou (2). Opět stačí pomocí ERO upravit matici  $\mathbf{X}$  na stupňovitý tvar a podívat se, zda v každém sloupci leží vedoucí prvek nějakého řádku.

Pokud tento případ nastane, nemáme možnost zvolit parametry,  $\mathbf{c} = \mathbf{0}$  je jediným řešením soustavy  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$  a vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  jsou lineárně nezávislé.

## Lineární obal v $K^m$ VII

V opačném případě máme možnost volby alespoň jednoho parametru, soustava má tedy nějaké nenulové řešení a vektory  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  jsou lineárně závislé.

Vedoucím prvkem řádku  $(0, \dots, 0 \mid z)$ , kde  $z \neq 0$ , je právě v  $(n + 1)$ -ním sloupci ležící prvek  $z$ .

Tedy matice v stupňovitém tvaru, která je řádkově ekvivalentní s  $(\mathbf{X} \mid \mathbf{y})$  neobsahuje takový řádek právě tehdy, když v jejím posledním sloupci neleží vedoucí prvek žádného řádku.

## Lineární obal v $K^m$ VIII

### Příklad

Uvažme sloupcové vektory  $\mathbf{x}_1 = (1, 1, -1, -1)^T$ ,  $\mathbf{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ ,  
 $\mathbf{x}_3 = (3, 1, -3, -5)^T$ ,  $\mathbf{x}_4 = (0, 0, 1, 2)^T$ ,  $\mathbf{y} = (3, 5, -2, 1)^T$ ,  
 $\mathbf{z} = (1, 1, 1, 1)^T$  v prostoru  $\mathbb{R}^4$ .

Máme rozhodnout, zda vektory  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$  leží v lineárním obalu  
 $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ .



## Lineární obal v $K^m$ IX

Označme si následující matice

$$(\mathbf{X}|\mathbf{y}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right),$$

$$(\mathbf{X}|\mathbf{z}) = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

## Lineární obal v $K^m$ $X$

Matice  $(\mathbf{X} | \mathbf{y})$ ,  $(\mathbf{X} | \mathbf{z})$  jsou řádkově ekvivalentní s maticemi

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ resp. } \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Okamžitě vidíme, že platí  $\mathbf{y} \in [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$

a  $\mathbf{z} \notin [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4]$ .

# Lineární obal v $K^m$ XI

## Příklad

*Zjistíme, zda sloupce reálné matice*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

*jsou lineárně závislé nebo nezávislé.*

## Lineární obal v $K^m$ XII

Tato matice je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že slouce matice  $\mathbf{X}$  jsou lineárně nezávislé.

## Lineární obal v $K^m$ XIII

Z druhé strany,  $\mathbf{X}$  jakožto matice nad tělesem  $\mathbb{Z}_5$  je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy sloupce matice  $\mathbf{X}$ , chápané jakožto vektory z vektorového prostoru  $\mathbb{Z}_5^4$ , jsou lineárně závislé.

## Lineární obal v $K^m$ XIV

### Tvrzení

*Nechť  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in K^{m \times n}$  jsou řádkově ekvivalentní matice, přičemž matice  $\mathbf{Y}$  je ve stupňovitém tvaru. Pro  $1 \leq j \leq n$  označme  $\mathbf{x}_j = \mathbf{s}_j(\mathbf{X})$   $j$ -tý sloupec matice  $\mathbf{X}$ . Necht'  $j_1 < \dots < j_k$  jsou indexy všech sloupců matice  $\mathbf{Y}$ , ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků. Potom platí:*

## Lineární obal v $K^m$ XV

- (a) vektory  $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$  jsou lineárně nezávislé;
- (b) pokud v  $j$ -tém sloupci matice  $\mathbf{Y}$  neleží vedoucí prvek žádného jejího řádku (t. j.  $1 \leq j \leq n$  a  $j \neq j_1, \dots, j_k$ ), tak vektor  $\mathbf{x}_j$  je lineární kombinací vektorů  $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_l}$ , kde  $l \leq k$  je největší index, pro který platí  $j_l < j$ ;
- (c)  $[\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}] = [\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .

## Lineární obal v $K^m$ XVI

Výše uvedené tvrzení nám dává přímý návod na řešení otázky (3).

Stačí pomocí ERO upravit matici  $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  na matici  $\mathbf{Y}$  v stupňovitém tvaru a zjistit v ní indexy  $j_1 < \dots < j_k$  všech sloupců, ve kterých leží vedoucí prvky jejich řádků.

Potom  $\mathbf{x}_{j_1}, \dots, \mathbf{x}_{j_k}$  jsou hledané lineární nezávislé vektory, které generují lineární podprostor  $[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ .



# Lineární obal v $K^m$ XVII

## Příklad

*Ze sloupců reálné matice*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

*je třeba vybrat lineární nezávislé sloupce, které generují lineární obal všech sloupců matice  $\mathbf{X}$ .*

## Lineární obal v $K^m$ XVIII

Matice  $\mathbf{X}$  je řádkově ekvivalentní s maticí

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve stupňovitém tvaru. Vedoucí prvky řádků matice  $\mathbf{Y}$  se nachází ve sloupcích 1, 2 a 4.

## Lineární obal v $K^m$ XIX

Hledané vektory jsou tedy sloupce 1, 2 a 4 matice  $\mathbf{X}$ . Zapsané vedle sebe pak tvoří matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Lineární obal v $K^m$ XX

**Poznámka.** Výše uvedený postup řešení otázek (1), (2) a (3) pro prostory sloupcových vektorů  $K^m$  lze modifikovat na prostory řádkových vektorů  $K^m$  – např. transponováním příslušných matic řádkových vektorů nebo nahrazením elementárních řádkových operací sloupcovými.

# Lineárně nezávislé posloupnosti I

***Nekonečnou posloupnost***  $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty} = (\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \dots)$  vektorů z prostoru  $V$  nazýváme ***lineárně nezávislou***, pokud každá její konečná podposloupnost  $(\mathbf{u}_{k_1}, \dots, \mathbf{u}_{k_n})$ , kde  $0 \leq k_1 < \dots < k_n$ , je lineárně nezávislá.

# Lineárně nezávislé posloupnosti II

## Tvrzení

*Nekonečná posloupnost  $(\mathbf{u}_k)_{k=0}^{\infty}$  vektorů z  $V$  je lineárně nezávislá právě tehdy, když pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je její počáteční úsek  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  lineárně nezávislý.*

Například posloupnost  $(1, x, x^2, \dots, x^k, \dots)$  všech mocnin  $x$  je lineárně nezávislá posloupnost ve vektorovém prostoru  $K[x]$  všech polynomů v proměnné  $x$  nad tělesem  $K$ .

Polynom  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  je (definitornicky) nulový právě tehdy, když  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$ .

## Lineárně nezávislé posloupnosti III

**Množina**  $X \subseteq V$  sa nazýva **lineárně nezávislá**, pokud pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  každá uspořádaná  $n$ -tice **navzájem různých** vektorů  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  z množiny  $X$  je lineárně nezávislá.

Kdyby totiž  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$  nebyly navzájem různé vektory, nemohly by být lineárně nezávislé.

Lineární závislost či nezávislost uspořádané  $n$ -tice vektorů nezávisí na jejich pořadí.

## Lineárně nezávislé posloupnosti IV

Zřejmě uspořádaná  $n$ -tice  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  je lineárně nezávislá právě tehdy, když je lineárně nezávislá uspořádaná  $n$ -tice  $(\mathbf{u}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{u}_{\sigma(n)})$ , kde  $\sigma$  je libovolná permutace množiny  $\{1, \dots, n\}$ .

Tedy, lineární (ne)závislost uspořádané  $n$ -tice  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  navzájem různých vektorů je vlastností množiny  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ .



# Lineárně nezávislé posloupnosti $V$

## Tvrzení

*Uspořádaná  $n$ -tice  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$  navzájem různých vektorů z  $V$  je lineárně nezávislá právě tehdy, když množina  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subseteq V$  je lineárně nezávislá.*

# Lineárně nezávislé posloupnosti VI

## Tvrzení

*Nechť  $X \subseteq V$  je lineárně nezávislá množina a  $\mathbf{v} \in V$ . Potom následující podmínky jsou ekvivalentní:*

- (i)  $\mathbf{v} \in [X]$ ;*
- (ii) množina  $X \cup \{\mathbf{v}\}$  je lineárně závislá;*
- (iii)  $[X \cup \{\mathbf{v}\}] = [X]$ .*